

# Commande avancée

6 CM, 6 TD, 4TP, 1 exam

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle



# Qui suis je?



## **Damien Koenig :**

- ✓ Enseignant/Chercheur à l'Esisar
- ✓ Recherche au Gipsa-lab UMR CNRS
- ✓ Phd : 1998
- ✓ Habilité à diriger les recherches 2007

- ✓ Site web à votre disposition
- ✓ <http://koenig-damien.jimdo.com/enseignement>

# Introduction aux systèmes asservis

## Systèmes de régulation

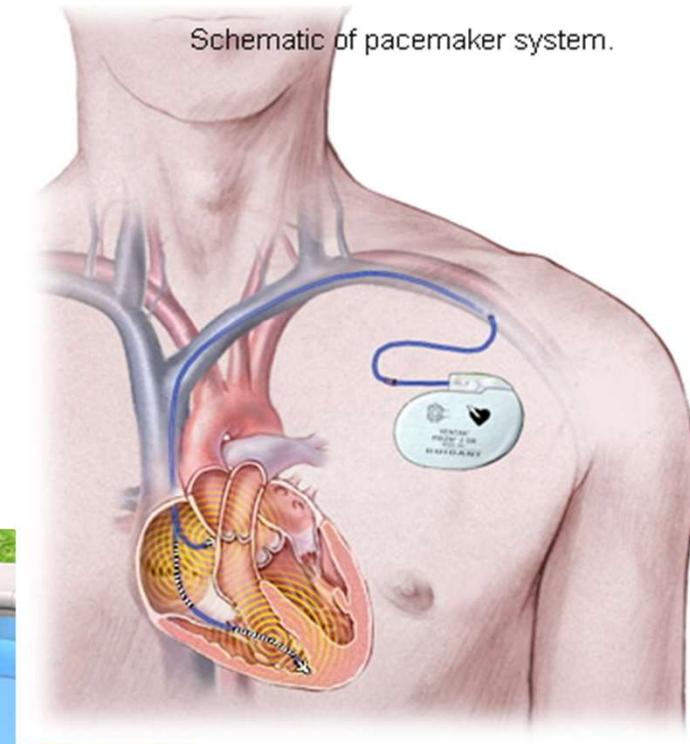


Clim automatique



Régulateur niveau piscine

## Consigne constante



Pacemaker

# Types de systèmes asservis:

## Systemes suiveurs



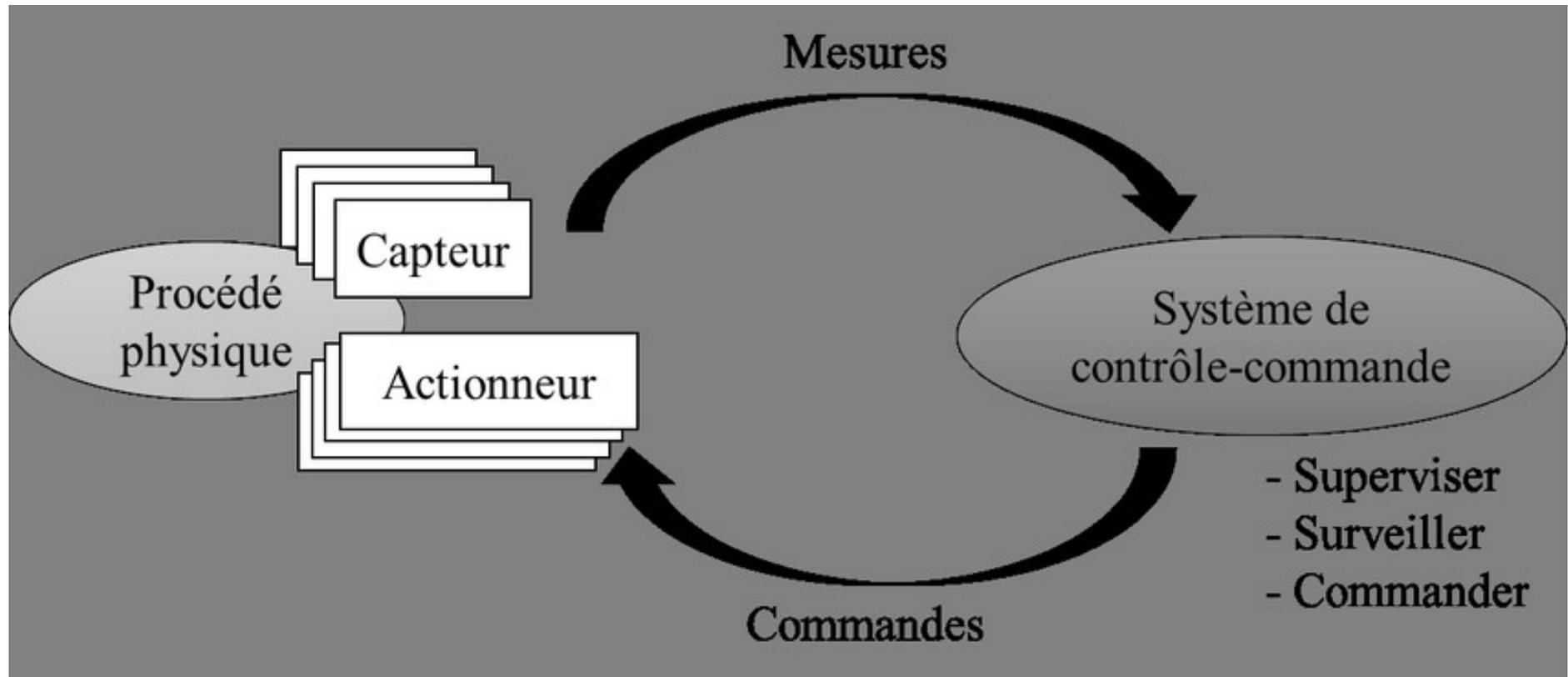
Missile à tête chercheuse



Suiveur solaire

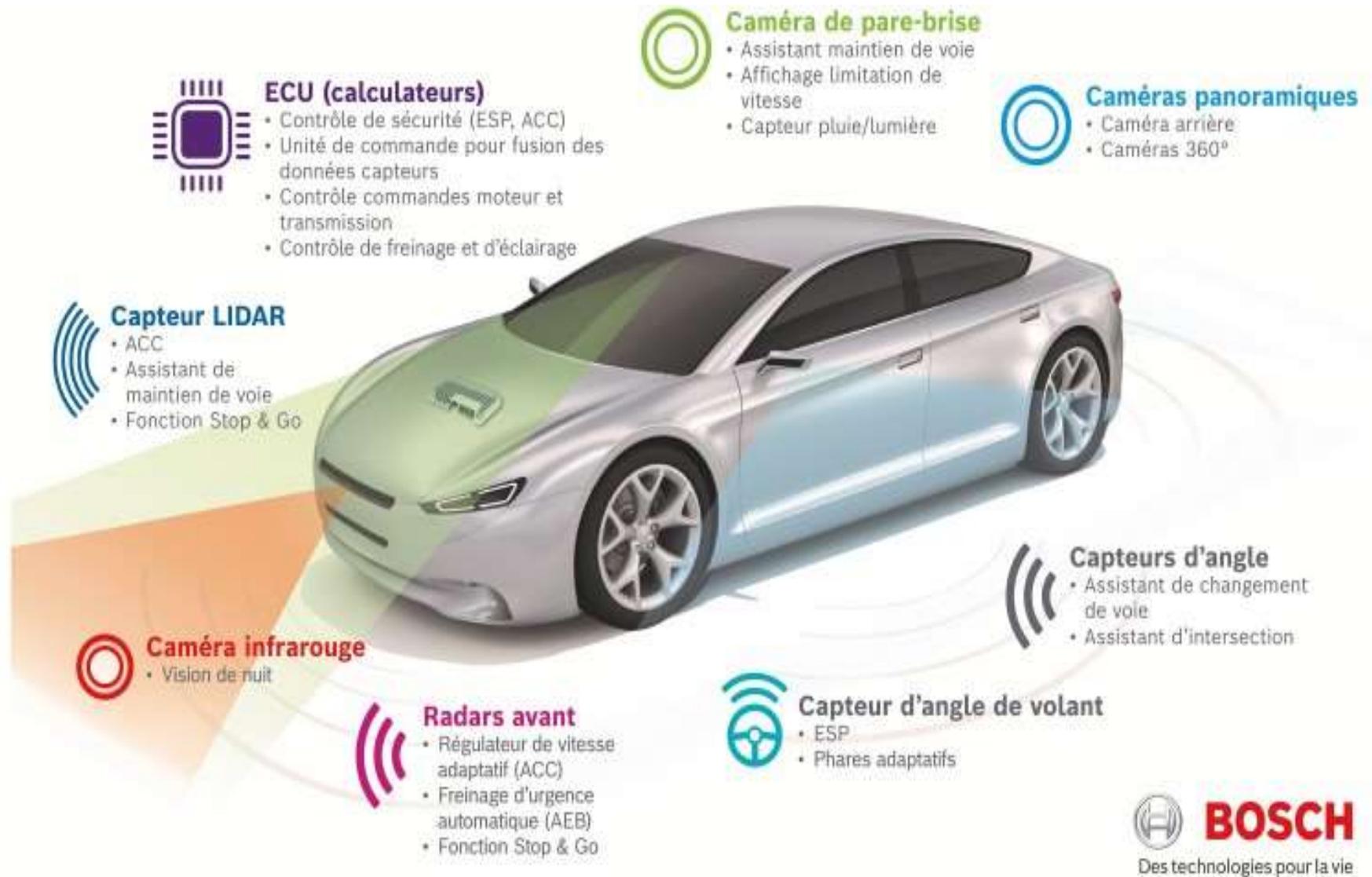
## Consigne variable

# But du contrôle-commande

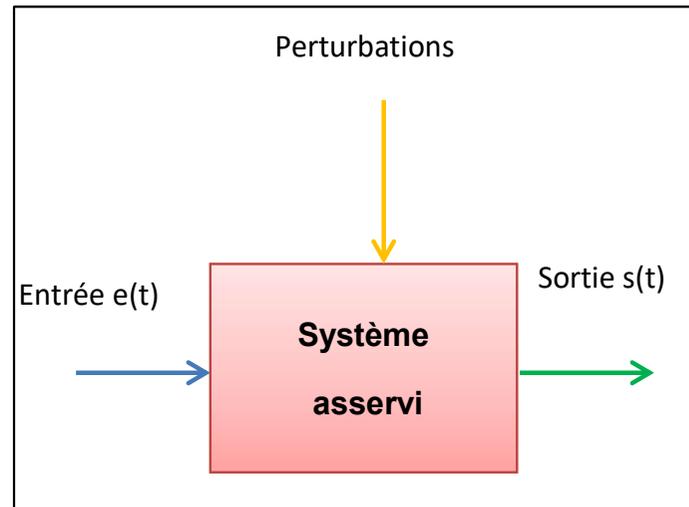


Le **contrôle-commande** est un système qui gère et surveille les opérations d'un processus ou d'une machine. Il permet de commander et de réguler les différentes actions et paramètres pour assurer un fonctionnement optimal.

# Quelques applications



# Quelques applications



La sortie doit correspondre au plus près à l'entrée  
(boucle retour avec capteur)

→ { stabilité  
précision  
rapidité  
amortissement ...

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

➔ Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

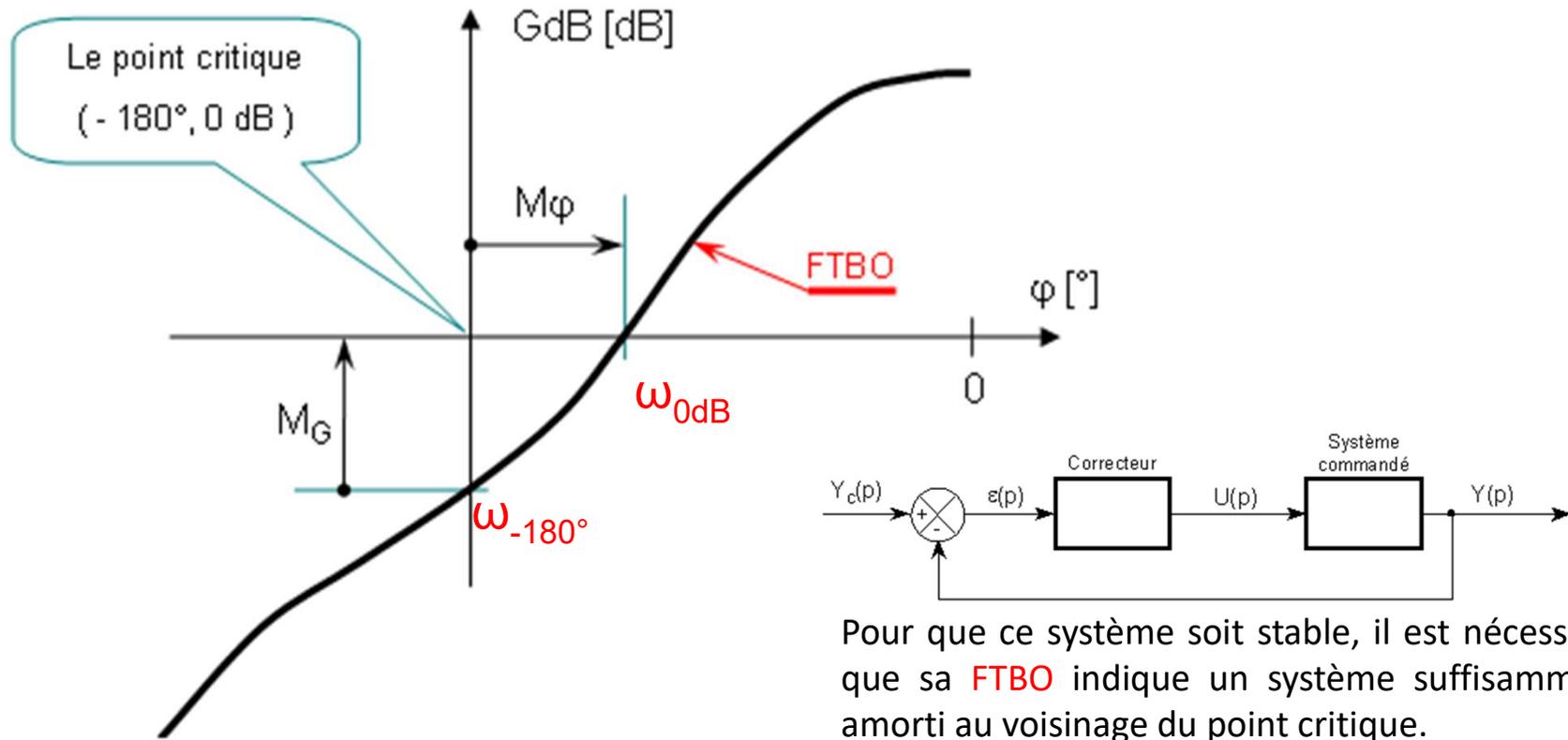
Commande LQ à pondération fréquentielle



# Rappel : Stabilité, marge de gain et phase

Marge de phase : Soit  $\omega_{0dB}$  la pulsation du point de gain nul.

Le système est stable en boucle fermée si, pour cette pulsation, la phase correspondante est strictement supérieure à  $-180^\circ$ .

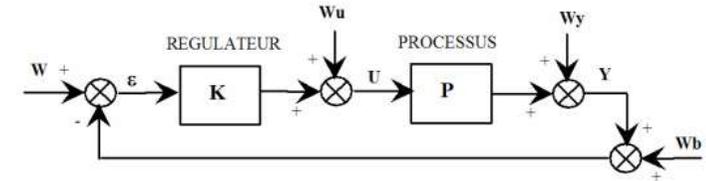
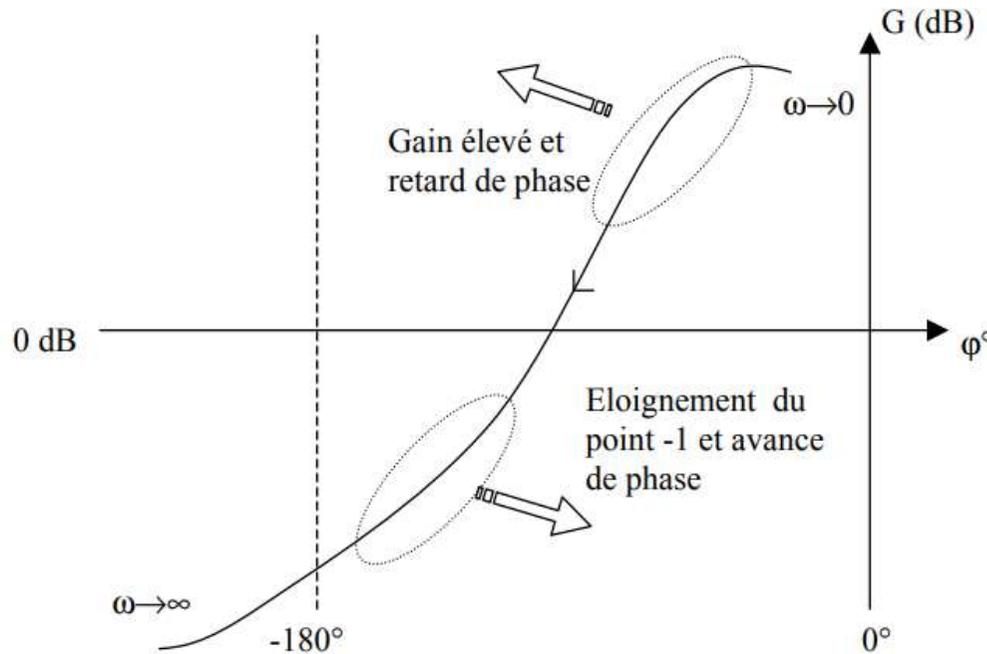


Marge de gain : Soit  $\omega_{-180^\circ}$  la pulsation du point de phase égale à  $-180^\circ$ .

Le système est stable en boucle fermée si, pour cette pulsation, le gain correspondant est strictement négatif.

# Allure recherchée lors de l'étude du correcteur K

- d'éloigner le lieu de Black du point -1 (0 dB, -180°) de façon à augmenter la stabilité, c'est à dire augmentation de la marge de gain et de la marge de phase.  
Souvent on choisit:  $M_G = 10$  dB et  $M_\varphi \geq 45^\circ$



Retard de phase

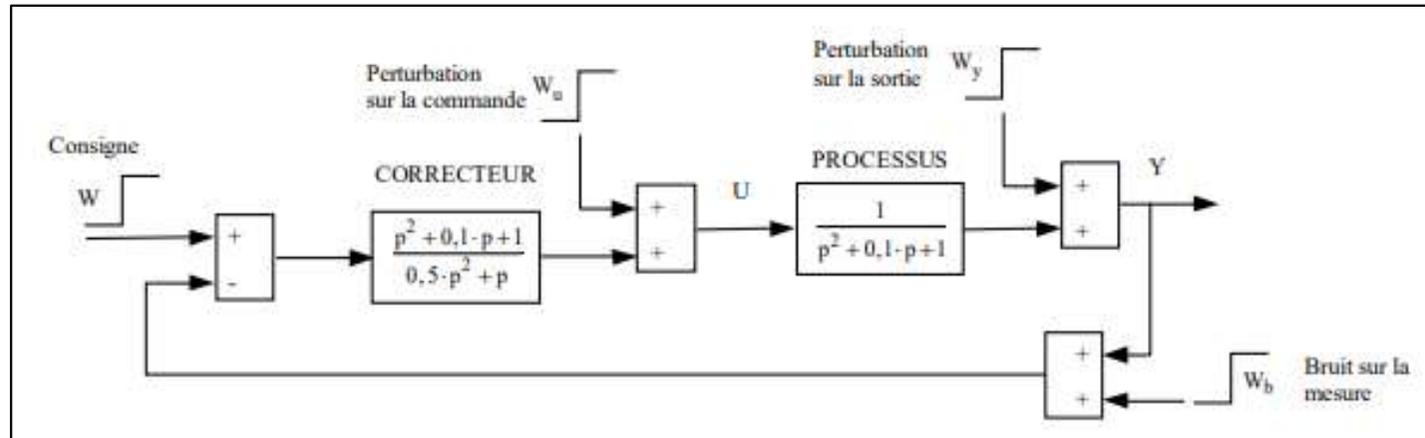
$$K(p) = \frac{1 + \tau_n \cdot p}{1 + b \cdot \tau_n \cdot p}, \quad b > 1$$

Avance de phase

$$K(p) = \frac{1 + a \cdot \tau_n \cdot p}{1 + \tau_n \cdot p}, \quad a > 1$$

- d'augmenter le gain du système en boucle ouverte pour augmenter la précision. L'annulation de l'erreur statique peut être obtenue si le système en boucle ouverte admet une intégration ( $1/p$ ).
- D'augmenter la bande passante, ce qui diminue le temps de réponse,
- Provoquer une avance de phase en moyenne et haute fréquences et un retard de phase en basse fréquence pour une meilleure stabilité.

# Exemple



Montrer que

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{1}{0,5 \cdot p^2 + p + 1}$$

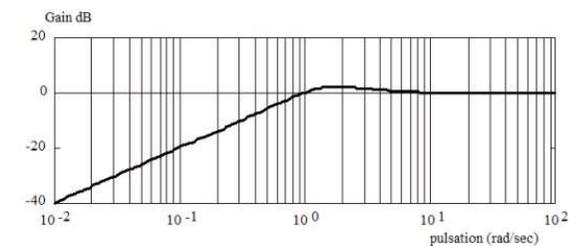
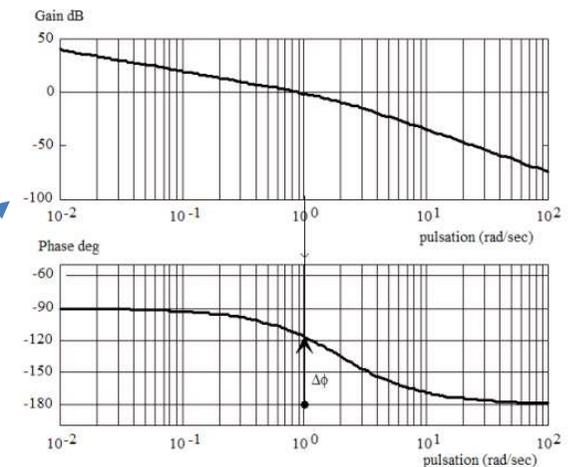
Transfert de boucle

$$K(p) \cdot P(p) = \frac{B(p) \cdot R(p)}{A(p) \cdot S(p)} = \frac{1}{0,5 \cdot p^2 + p}$$

Sensibilité

$$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{A(p) \cdot S(p)}{A(p) \cdot S(p) + B(p) \cdot R(p)}$$

$$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5 \cdot p^2 + p}{0,5 \cdot p^2 + p + 1}$$

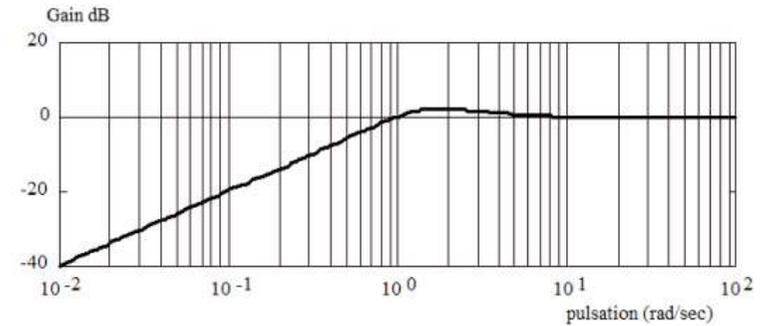


Réponse fréquentielle

# Exemple

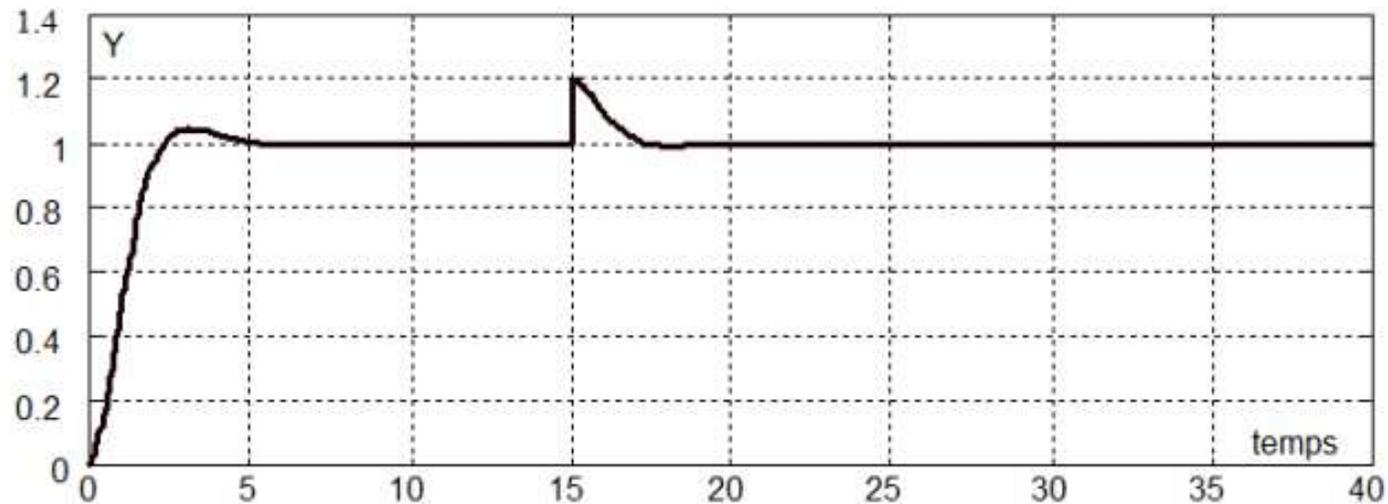
Sensibilité

$$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5.p^2 + p}{0,5.p^2 + p + 1}$$



Réponse fréquentielle

Réponse temporelle à une perturbation échelon en sortie à t=15s



Réponse indicielle avec une perturbation sur la sortie

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

→ Partie 1 : Commande par placement de pôles

→ Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

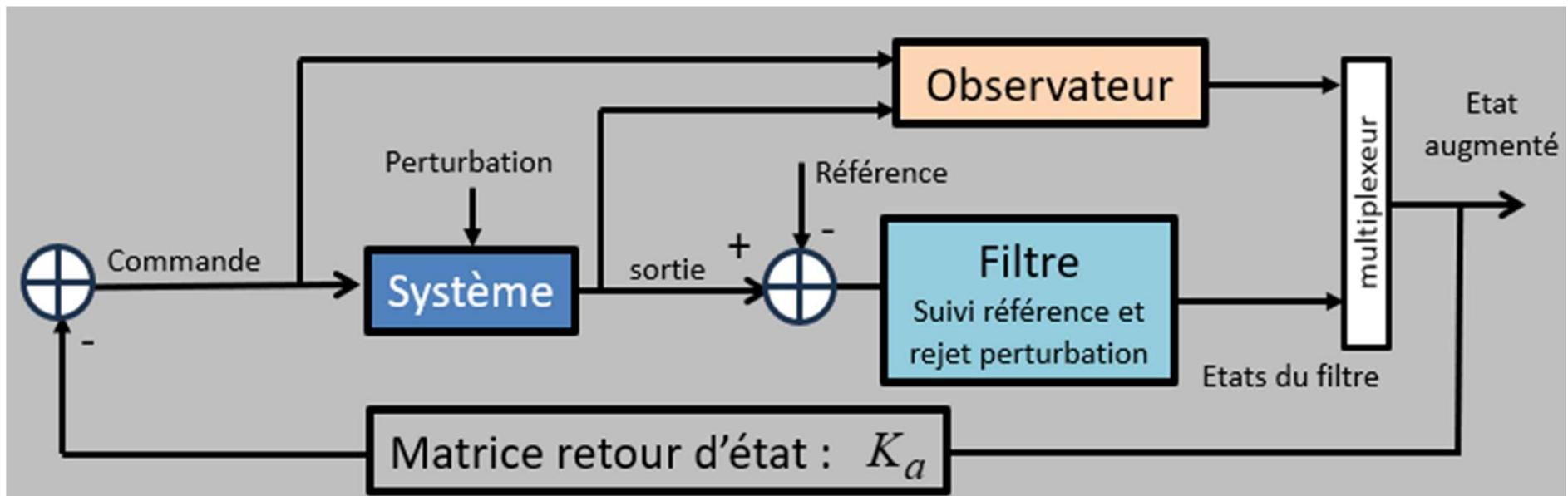
Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

# Schéma global

Commande par retour d'état



# Représentation Interne

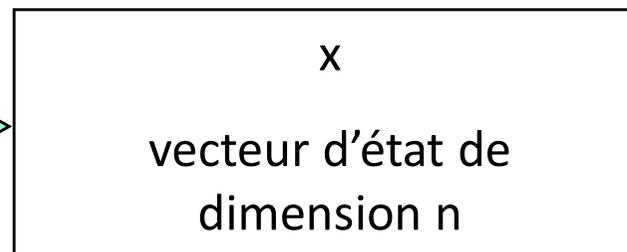
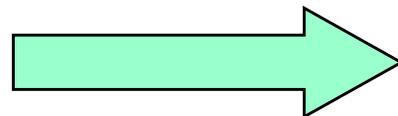
- Modèle d'état de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

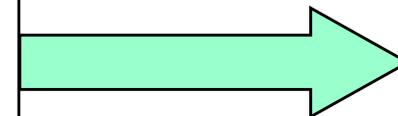
$$y = Cx + Du$$

- Où  $\underline{x}$  est le vecteur d'état composé des variables dynamiques,  $u$  la commande et  $y$  les mesures

$u$  : vecteur des entrées  
de dimension  $n_u$



$y$  : vecteur de sortie  
de dimension  $m$



# Modélisation par équations différentielles

## Systèmes du premier ordre

*constante de temps du système (s)*


$$\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$$



*Gain du système [s]/[e]*

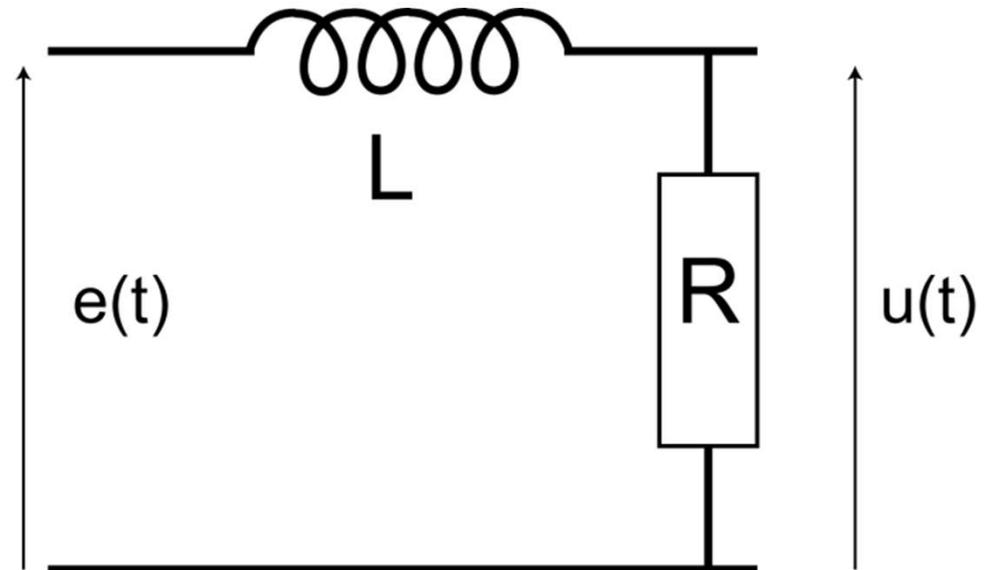
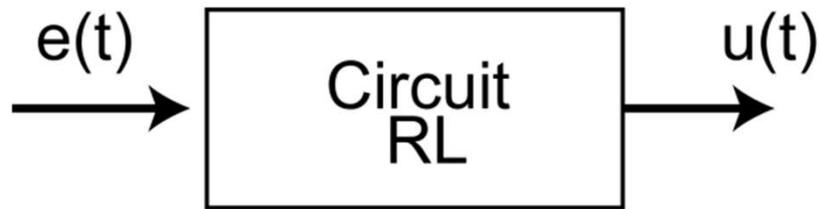
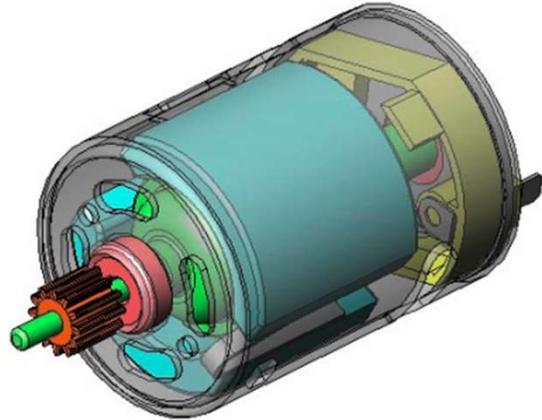
Déduire, les matrices A, B, C et D ainsi que les variables  $\underline{x}$ , u et y :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

# Exemple 1 : Moteur électrique

## Systemes du premier ordre



$$e(t) = L \frac{d i(t)}{dt} + R i(t)$$

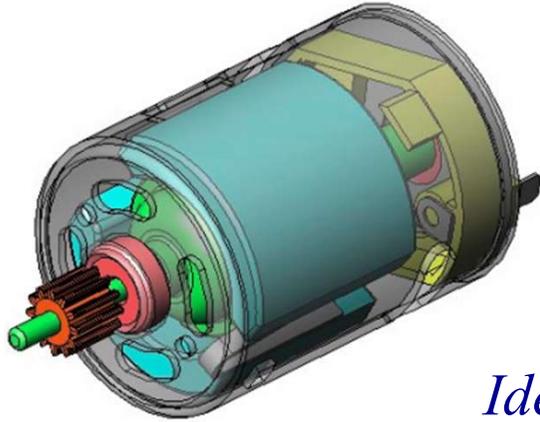
$$u(t) = R i(t)$$


$$\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{dt} + u(t) = e(t)$$

*Exemple : circuit RL (moteur électrique)*

# Exemple 1 : Moteur électrique

## Systemes du premier ordre



$$\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{d t} + u(t) = e(t)$$

*Identification avec*  $\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R} \quad K = 1$$

# Exemple 2 : Suspension

## Systemes du deuxième ordre

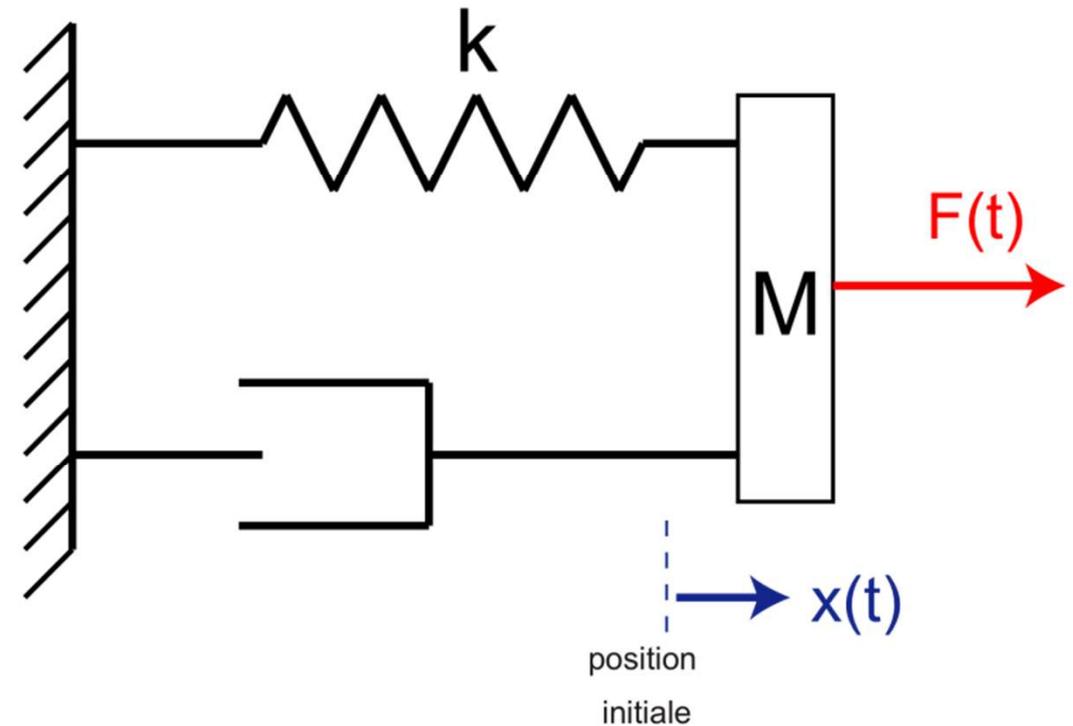
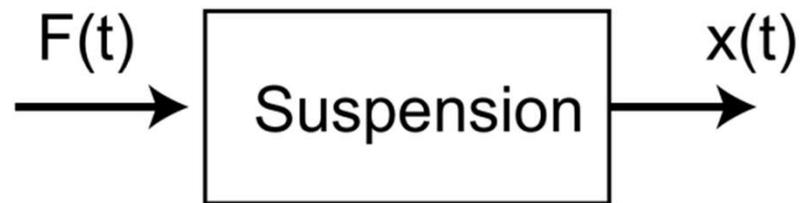
*Amortisseur*

*Ressort*



# Exemple 2 : Suspension

## Systemes du deuxieme ordre



# Exemple 2 : Suspension

## Systemes du deuxieme ordre



Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la masse donne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{M} x(t) = \frac{1}{M} F(t)$$

Identification système 2<sup>ème</sup> ordre

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

$$K = \frac{1}{k}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{Mk}}$$

- ✓  $z$  = coefficient d'amortissement (rad/s)
- ✓  $\omega_0$  = pulsation propre (rad/s)
- ✓  $K$  = gain du système [s]/[e]

# Déduire la représentation d'état

## Systemes du deuxième ordre



$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{M} x(t) = \frac{1}{M} F(t)$$

- Déduire, les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ainsi que les variables  $x$ ,  $u$  et  $y$  :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

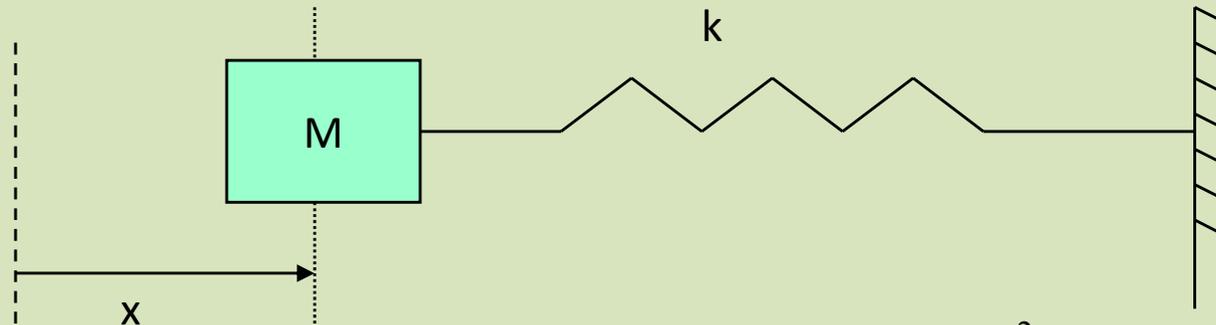
$$y = Cx + Du$$

### *Exemple 2 : Suspension*

# Exemple 3 : Oscillateur 2ème ordre

## □ Oscillateur harmonique

- Le système est formé d'une masse  $M$  soumise à un ressort de raideur  $k$ .



- Principe fondamental de la dynamique :  $M\ddot{x} = -kx$ , où  $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$
- Représentation d'état par variable de phase :

Représentation interne  $\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

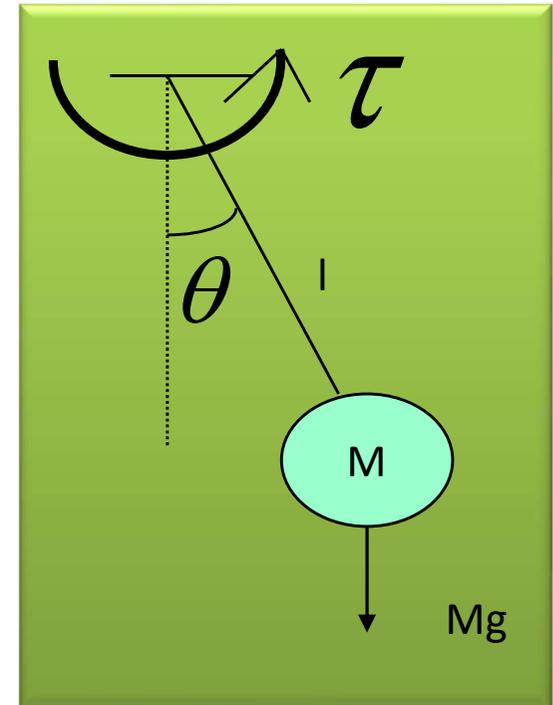
# Exemple 4 : Pendule simple

## □ Pendule

- Le système est formé d'une masse  $M$  suspendue à un fil rigide de longueur  $l$  fixé en  $O$ , soumise à l'action du champ de gravité  $g$ .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + g/l \sin\theta = \tau / Ml^2$$

- Représentation d'état linéaire par variable de phase autour de l'équilibre :



Représentation interne  
du système linéaire  
DL à l'ordre 1 :  $\sin\theta \cong \theta$   
autour de l'équilibre

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{pmatrix} \tau$$

# Exemple 5 : Mobile

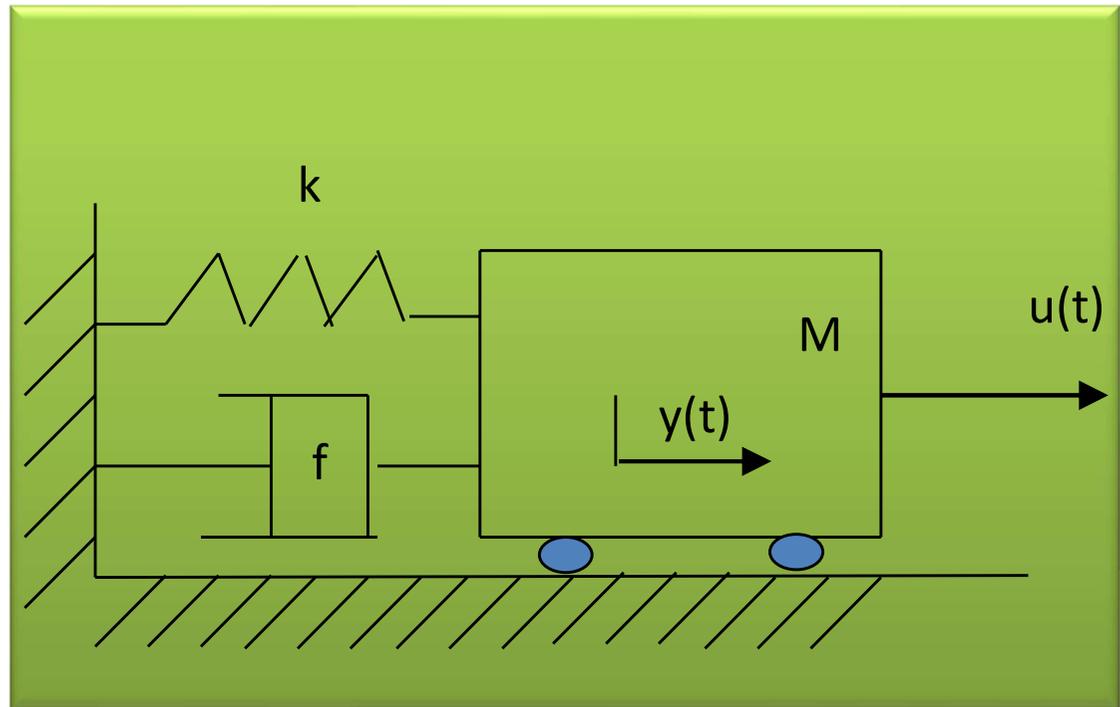
## □ Mobile

- $u(t)$  est le signal de commande

$$M\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

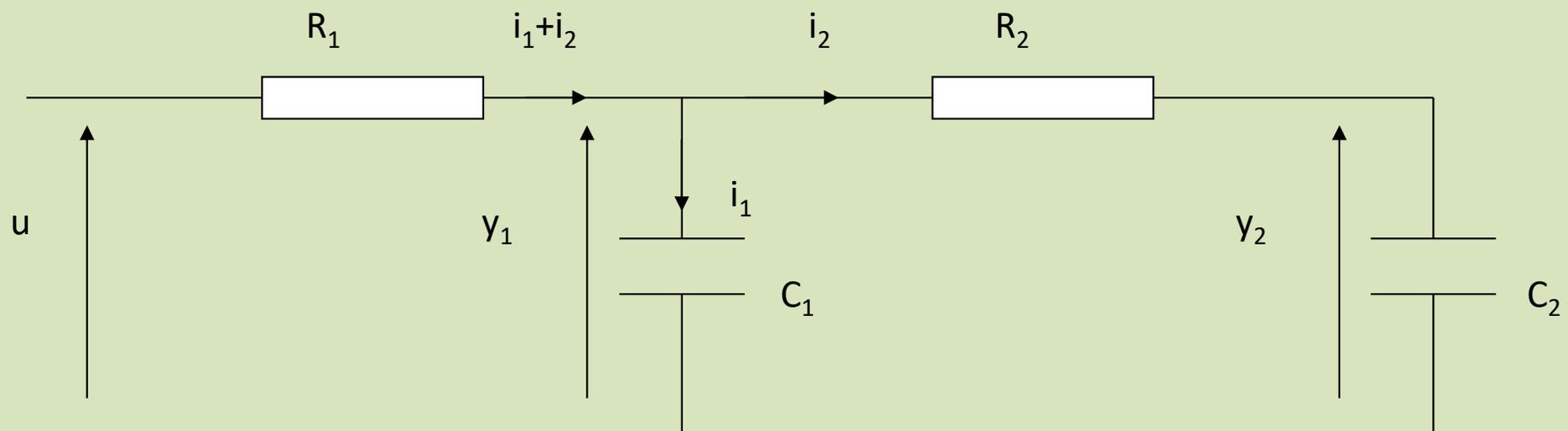
Représentation interne :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -f/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix} u$$



## Exemple 6 : double filtre RC

- ❑ La représentation d'état peut être orientée de façon à faire apparaître explicitement des variables (d'état) choisies par l'utilisateur.
- ❑ Exemple :
  - ❑ 1<sup>er</sup> cas avec  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$
  - ❑ 2<sup>ème</sup> cas avec  $y_2(t)$  et  $i_2(t)$ .



## Exemple 6 : double filtre RC

□ 1<sup>er</sup> cas on le vecteur d'état  $x$  composé des états  $y_1(t)$

et  $y_2(t)$  :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

□ Montrer que :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \underline{x}$$

# Exemple 6 : double filtre RC

- 2<sup>ème</sup> cas, on considère le vecteur d'état :

$$\underline{\hat{x}} = \begin{bmatrix} y_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

- Montrer que :  $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$

- avec  $y = \hat{C}\hat{x}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{R_1 R_2 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 R_2 C_1 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [1 \ 0]$$

- On peut noter que cette seconde représentation est semblable à la première, à ceci près que le nouvel état est une combinaison linéaire de l'état  $x$ .

# Changement de base

□ Matrice de passage :  $\hat{X} = PX$

▪ où  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1/R_2 \end{bmatrix}$

□ Montrer que :  $\hat{A} = PAP^{-1}$

$$\hat{B} = PB$$

$$\hat{C} = CP^{-1}$$

□ Aide :  $\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$

# Passage de la représentation d'état à la représentation externe.

## □ Représentation d'état

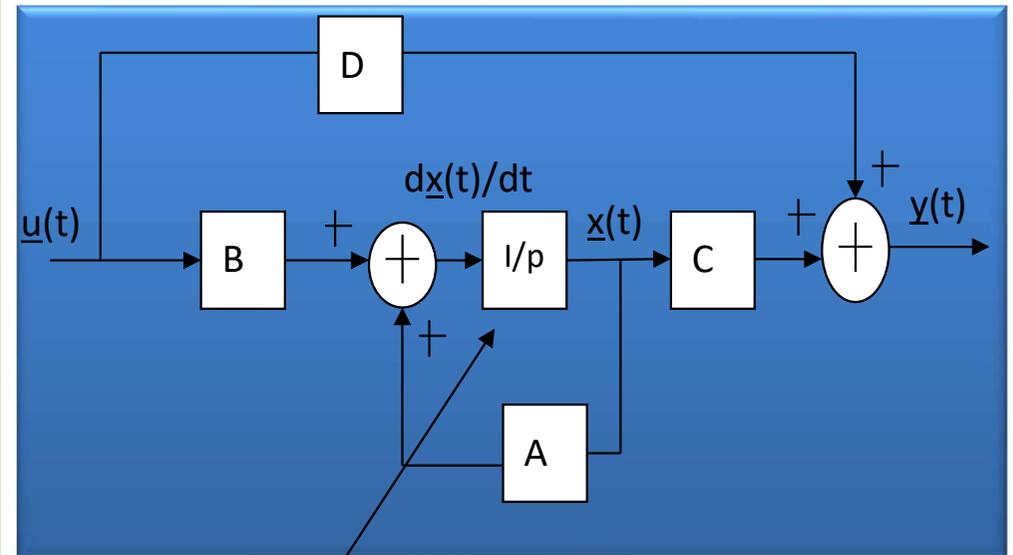
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$

## □ Laplace

$$\begin{cases} p\underline{x}(p) = A\underline{x}(p) + B\underline{u}(p) \\ \underline{y}(p) = C\underline{x}(p) + D\underline{u}(p) \end{cases}$$

$$\underline{y}(p) = (C(pI - A)^{-1}B + D)\underline{u}(p)$$

Schéma bloc



La mémoire du système

# Passage de la représentation externe à la représentation d'état.

## □ Représentation externe

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(p) X(p)}{X(p) U(p)}$$

## □ Laplace inverse

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = u(t)$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m \quad y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

# Obtention de la représentation d'état

□ On pose les variables de phase :

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

□ On obtient la représentation d'état:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0) \underline{x}(t)$$

Les modes de A sont les pôles de la fonction de transfert.

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

→ Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

→ Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

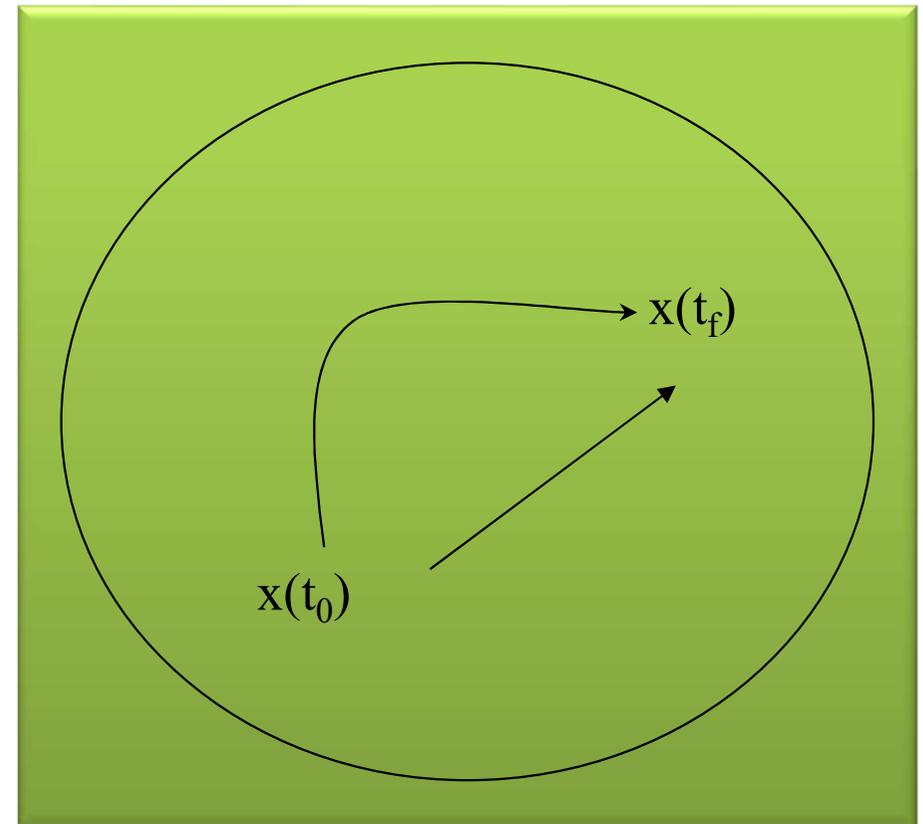
Commande LQ à pondération fréquentielle

# Propriétés de commandabilité et d'observabilité

## **Commandabilité**

Peut-on amener en un temps fini le système à commander d'un état arbitraire  $x(t_0)$  à un état désiré  $x(t_f)$  avec une loi de commande admissible?

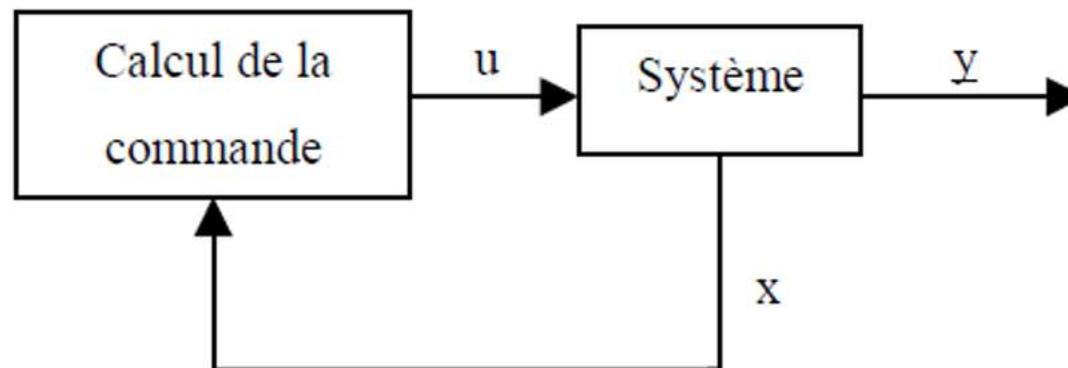
→ Concept de Commandabilité des systèmes



# Pourquoi étudier les propriétés de commandabilité ?

- ❑ Réponse : s'assurer avant de calculer la commande que le système est bien contrôlable.

– l'état est accessible à la mesure



# Commandabilité au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman

- Un système linéaire stationnaire est commandable vis à vis des états si et seulement si la matrice de commandabilité est de plein rang :

$$C_{(A,B)} = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$\text{rang}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n = \dim(x)$$

# Exemple

□ On considère le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ce système est – il complètement commandable au sens de Kalman ?

# Etats commandables au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman :

- La paire (A,B) est complètement commandable (CC) s'il est possible en agissant sur u d'amener en un temps fini ( $t_1-t_0$ ) n'importe quel état  $x(t_0)$  vers n'importe quel autre état  $x(t_1)$

Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) :  $\text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \Leftrightarrow \ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = 0$

Si  $\ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$  les états  $x_i \neq 0$  non nuls correspondent aux états NC

# Etats commandables au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman :

- La paire (A,B) est complètement commandable (CC) s'il est possible en agissant sur u d'amener en un temps fini ( $t_1-t_0$ ) n'importe quel état  $x(t_0)$  vers n'importe quel autre état  $x(t_1)$

Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) :  $\text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \Leftrightarrow \ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = 0$

Si  $\ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$  les états  $x_i \neq 0$  non nuls correspondent aux états NC

# Application du critère de Kalman

- On considère le système suivant. Montrer que le noyau à gauche de la matrice de commandabilité est nul, conclure.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Exercice complémentaire

## Exercice 2

Un système linéaire et continu est décrit par les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon \\ 4 & -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1]; \quad \mathbf{D} = 0$$

a) Montrer que le système est complètement contrôlable si et seulement si  $\varepsilon \neq 0$ .

Calculer la fonction de transfert,  $G(s)$ , entre  $U(s)$  et  $Y(s)$ , et montrer qu'il y a une simplification pôle-zéro si  $\varepsilon = 0$  (condition suffisante).

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

→ Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

→ Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

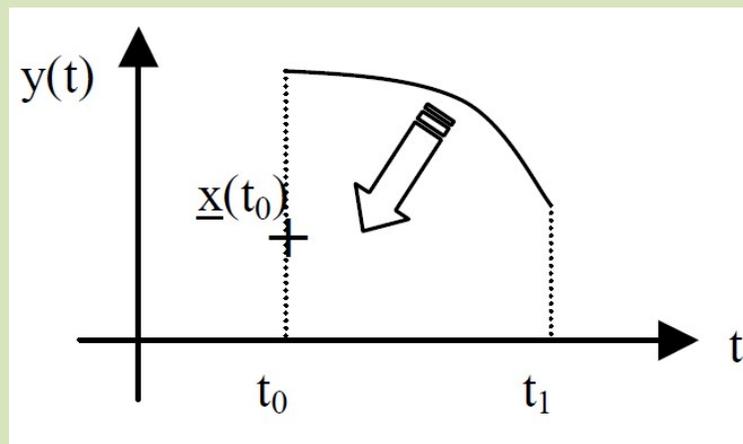
Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

# Observabilité

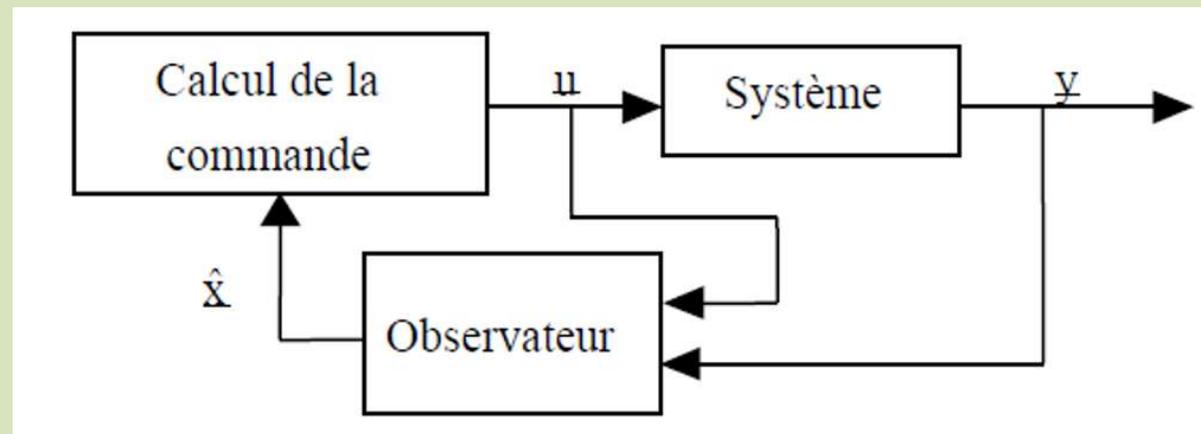
## □ Définition

Un système est dit observable à l'instant  $t_0$ , si connaissant l'état du système  $x(t)$ , il est possible, à partir de l'observation de la sortie  $y(t)$  sur un intervalle de temps fini (de  $t_0$  à  $t$ ), de déterminer l'état  $x(t_0)$ .



# Pourquoi étudier les propriétés d'observabilité ?

- ❑ Réponse : s'assurer avant de déterminer l'estimer de l'état que les capteurs (mesures) sont bien placés sur le système pour que le système soit observable ou au-moins détectable et donc que l'observateur existe.



# Observabilité au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman

- Un système linéaire stationnaire est observable vis à vis des états si et seulement si la matrice de d'observabilité est de plein rang :

$$O_{(A \ C)} = \left( C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T \right)^T$$

$$\text{rang} \left( C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T \right) = n$$



$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

# Application du critère de Kalman

2<sup>ème</sup> partie du TP pendule inverse

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

➔ Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

➔ **Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé**

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

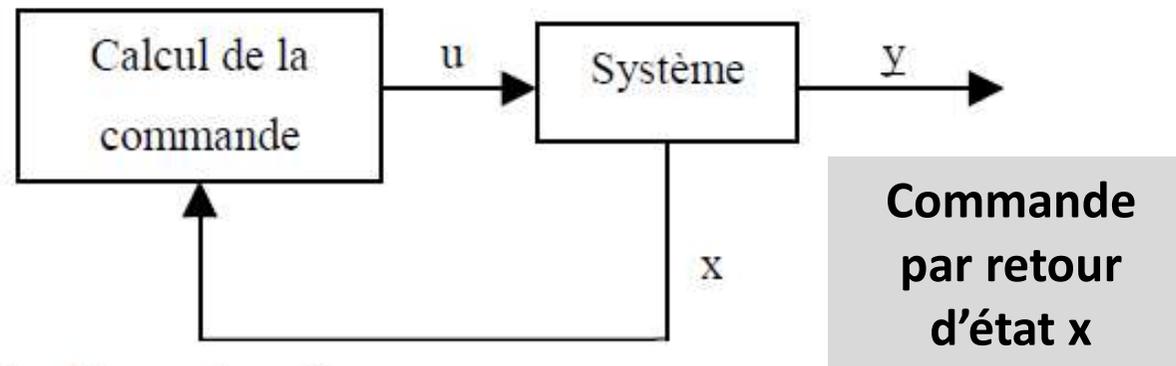
Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

# Commande par retour d'état

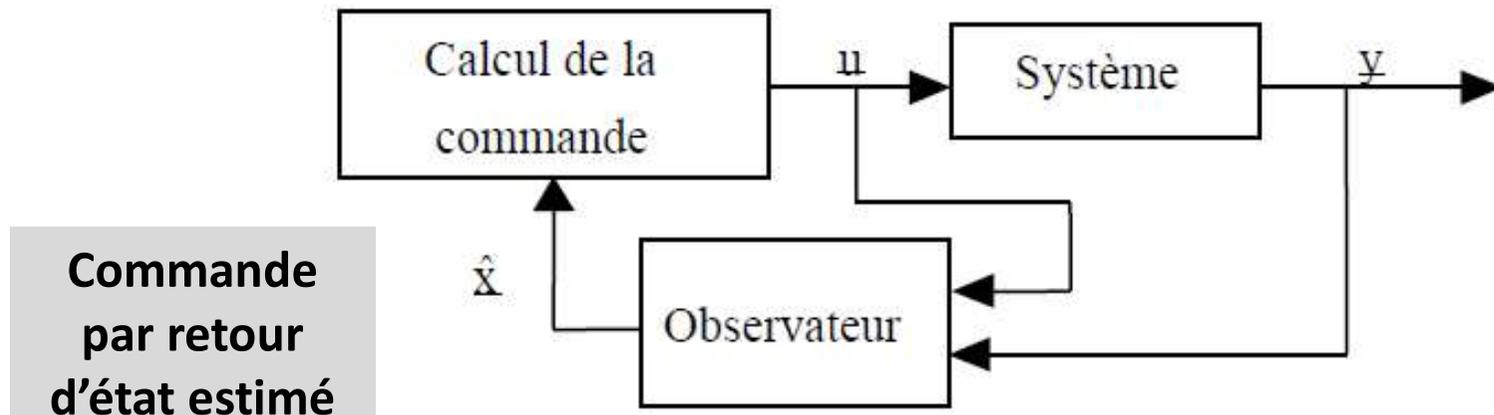
## ■ Implantation directe si :

- l'état est accessible à la mesure



## ■ Implantation indirecte si :

- le système est détectable



# I) Commande par retour d'état

## □ Hypothèse

- $x$  est accessible à la mesure

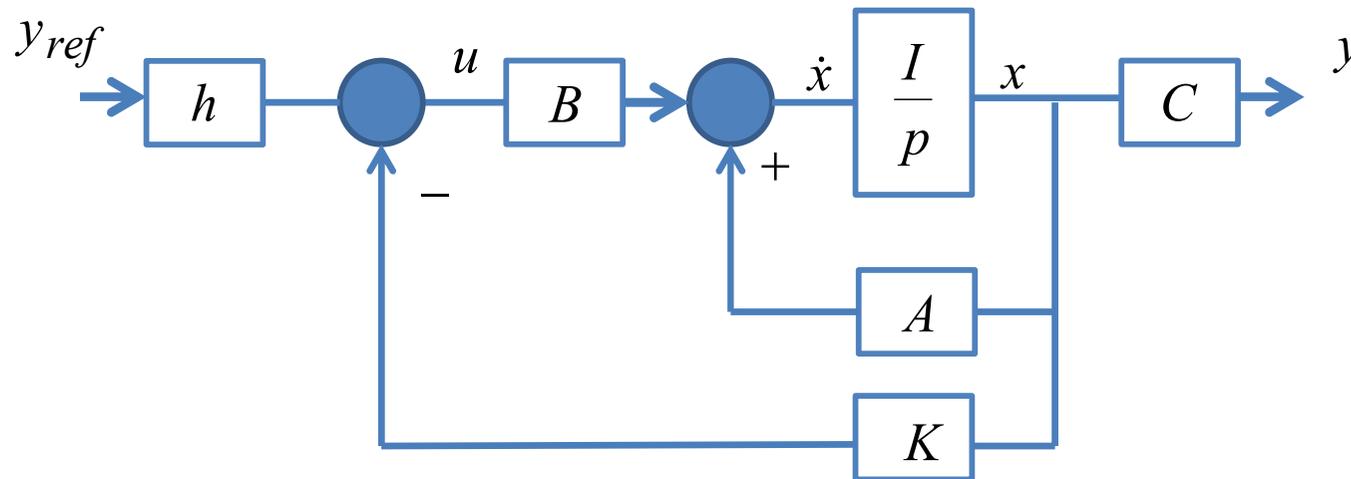
## □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

- commande  $u = -Kx + hy_{ref}$
- $K$  stabilise la BF
- $h$  est un préfiltre qui assure une erreur statique 0

# I) Commande par retour d'état

## □ Schéma bloc



## □ Boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bhy_{ref} \\ y = Cx \end{cases}$$

# I) Commande par retour d'état

## □ Fonctions :

- Transfert de boucle (loop)

✓  $loop = K(pI - A)^{-1}B$

- Sensibilité S

✓  $S(p) = \frac{1}{1 + K(pI - A)^{-1}B}$

- Sensibilité Complémentaire T

✓  $T(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = C(pI - (A - BK))^{-1}Bh$

✓  $T(p) = \frac{\text{transfert directe}}{1 + loop}$

# I) Commande par retour d'état

## □ Exercice:

- On considère le système

$$G(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2}{p+1}$$

- ✓ donner sa représentation par variable de phase
- ✓ déterminer K tel que la dynamique de la BF soit fixée en -2
- ✓ déterminer h tel que  $y \rightarrow y_{ref}$
- ✓ donner le schéma bloc complet
- ✓ déduire les transferts : loop, S et T
- ✓ tracer les modules
- ✓ conclure.

Pour effectuer le placement de pôles en **MATLAB**, vous pouvez utiliser la fonction `place`. Voici un exemple de code pour un système de deuxième ordre où l'on calcule la matrice de gain `K` pour placer les pôles aux emplacements souhaités [-1 et -2] et l'on compare les réponses indicielle du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

```
% Définir les matrices de l'espace d'état  
A = [-1, -2; 1, 0]; B = [2; 0]; C = [0, 1]; D = 0;
```

```
% Créer le système d'état  
sys = ss(A, B, C, D);  
% Définir les pôles souhaités  
p = [-1, -2];  
% Calculer la matrice de gain K pour le placement des pôles  
K = place(A, B, p);
```

```
% Vérifier les pôles en boucle fermée  
Acl = A - B * K;  
sys_cl = ss(Acl, B, C, D);  
poles_cl = pole(sys_cl);
```

```
% Afficher les pôles en boucle fermée  
disp('Pôles en boucle fermée :');  
disp(poles_cl);
```

```
% Comparer la réponse indicielle du système en boucle ouverte et en boucle fermée  
figure;  
step(sys);  
hold on;  
step(sys_cl);  
legend('Boucle ouverte', 'Boucle fermée');
```

### Exemple 1 CODE MATLAB

Commande par  
placement de pôles

Voici un exemple de code **MATLAB** pour tracer les fonctions de sensibilité  $S$ , de sensibilité complémentaire  $T$  et du transfert de boucle d'un système du deuxième ordre bouclé par une commande par retour d'état :

```
% Définir les matrices du système
A = [0 1; -2 -3]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;

% Placer les pôles souhaités pour le retour d'état
poles = [-1 -2]; K = place(A, B, poles);

% Matrice de retour d'état
A_cl = A - B*K;

% Définir la fonction de transfert en boucle fermée
sys_cl = ss(A_cl, B, C, D);

% Fonction de transfert en boucle ouverte
sys_ol = ss(A, B, C, D);

% Fonction de sensibilité
S = inv(eye(size(A)) + sys_ol*sys_cl);

% Fonction de sensibilité complémentaire
T = sys_cl * S;

% Tracer les fonctions de sensibilité, sensibilité complémentaire et transfert de boucle
figure;
subplot(3,1,1); bode(S); title('Fonction de sensibilité'); grid on;
subplot(3,1,2); bode(T); title('Fonction de sensibilité complémentaire'); grid on;
subplot(3,1,3); bode(sys_cl); title('Transfert de boucle'); grid on;
% si que le tracé du module alors remplacer « bode ... » par « sigma(K, A, B, 0) »
```

## Exemple 2 CODE MATLAB

Tracés des fonctions de sensibilité  $|S|$ , de sensibilité complémentaire  $|T|$  et du transfert de boucle  $|Loop|$

## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- $d$  est une perturbation constante

### □ Objectif $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

### □ Solution

- Appliquer la synthèse de commande à partir du système augmenté d'un état intégrateur

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$$

## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u + E_a d + H_a y_{ref} \\ y = C_a \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} y_{ref} \\ y = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Où  $x_a = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$   $\tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma \Leftrightarrow \dot{\tilde{y}}(t) = y - y_{ref}$
- Déduire  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $E_a$ ,  $H_a$  et  $C_a$
- Donner les propriétés de commandabilité
- Commande avec effet intégral

$$u = -K_a x_a = -\begin{bmatrix} K_x & K_{\tilde{y}} \end{bmatrix} x_a = -K_x x - K_{\tilde{y}} \times \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$$



## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

□ Boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (A_a - B_a K_a)x_a + E_a d + H_a y_{ref} \\ y = C_a x \end{cases}$$

### □ Fonctions

- Transfert de boucle (loop)

✓  $loop = K_a (pI - A_a)^{-1} B_a$

- Sensibilité perturbation

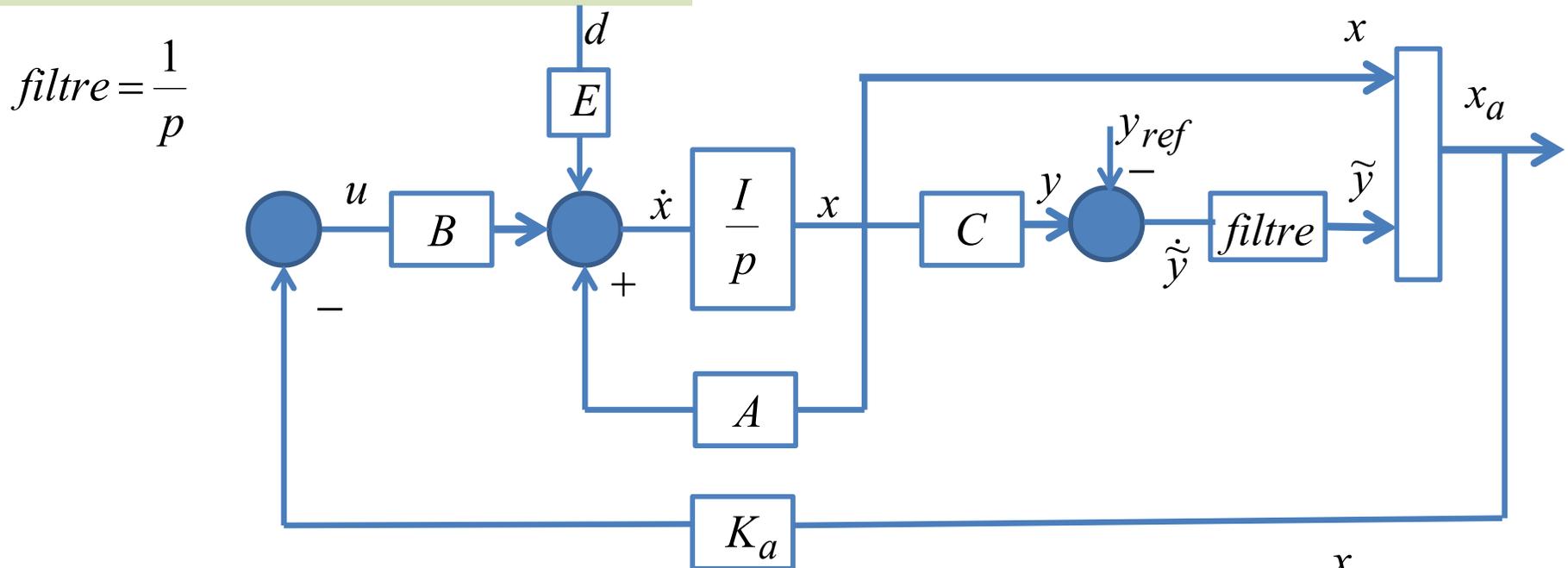
✓  $S_{yd}(p) = \frac{y(p)}{d(p)} = C_a (pI - (A_a - B_a K_a))^{-1} E_a$

- Sensibilité Complémentaire T

✓  $T_{yy_{ref}}(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = C_a (pI - (A_a - B_a K_a))^{-1} H_a$

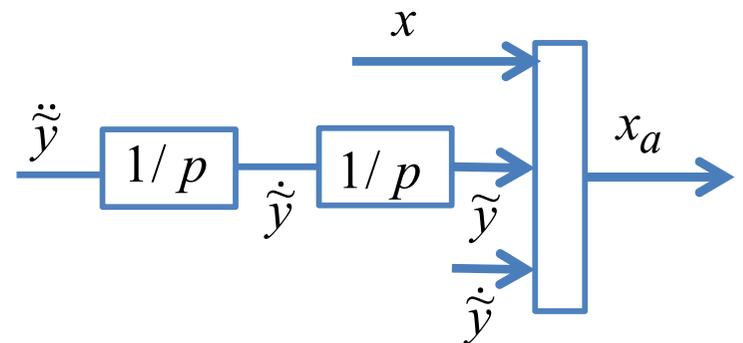
# II) Commande par retour d'état augmenté pour tenir compte de la nature de la perturbation

□ Cas 1 : Perturbation d de type constante



□ Cas 2 : Perturbation d de type rampe

$filtre = \frac{1}{p^2}$



□ Cas 3 : Perturbation d de type sinusoïdale de pulsation w

$filtre = \frac{1}{p^2 + w^2}$



## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Exercice:

- On considère le système 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u + d \\ y = x \end{cases}$$

- Objectif

- ✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

- Solution

- ✓ Donner le système augmenté
  - ✓ Déterminer  $K_a$  tel que la dynamique de la BF soit fixée en -2
  - ✓ Donner le schéma bloc complet
  - ✓ Dédire les transferts : loop, S et T
  - ✓ Tracer les modules
  - ✓ Conclure.

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

→ Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

→ **Commande** par retour d'état  $x$  et **par retour d'état estimé**

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale

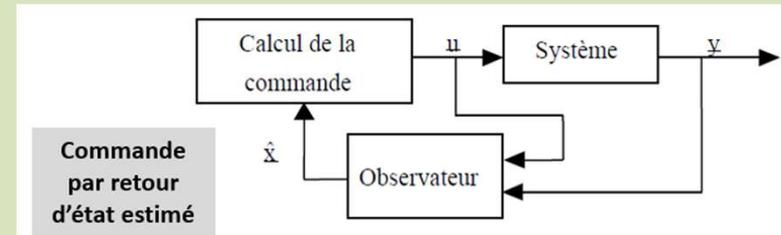
Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

# III) Commande par retour d'état estimé

## □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



- Hypothèse :  $x$  n'est pas accessible à la mesure
- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref}$

## □ Solution

- Commande :  $u = -K\hat{x} + hy_{ref}$
- Observateur :  $\underbrace{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$

## IV) Commande par retour d'état estimer avec effet intégral. Cas continu :

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- Hypothèse :  $x$  n'est pas accessible à la mesure
- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

### □ Solution

- Commande Reg/obs :  $u = -K_a \hat{x}_a$ 
  - ✓ Etat augmenté :  $\hat{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$
  - ✓ Observateur :  $\underbrace{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$

## IV) Commande par retour d'état estimer avec effet intégral

### □ A) Synthèse de l'Observateur

$$\underbrace{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$$

### □ Objectif 1 : Construire l'observateur

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) \rightarrow x(t) \Big|_{d=0} \quad \forall x_0, \hat{x}_0, u \text{ et } y$$

- Etude de la dynamique d'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \Big|_{d=0} \quad \text{où} \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

- Le gain L est déterminé pour assurer la vitesse de convergence souhaitée.

✓ Placement de pôles

✓  $p_i$  pôles désirés de l'observateur

$$|pI - (A - LC)| = \prod_{i=1}^{\dim(x)} (p - p_i)$$

## IV) Commande par retour d'état estimer avec effet intégral

### □ B) Synthèse de la commande

- Objectif 2 :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref}(t) \quad \forall d = cte$

- Solution : Trouver  $K_a$  tel que

$$\checkmark \quad |pI - (A_a - B_a K_a)| = \prod_{i=1}^{\dim(x) + \dim(y)} (p - p_i)$$

- On montre d'après le système matriciel ci-dessous que  $K_a$  et  $L$  peuvent être déterminés

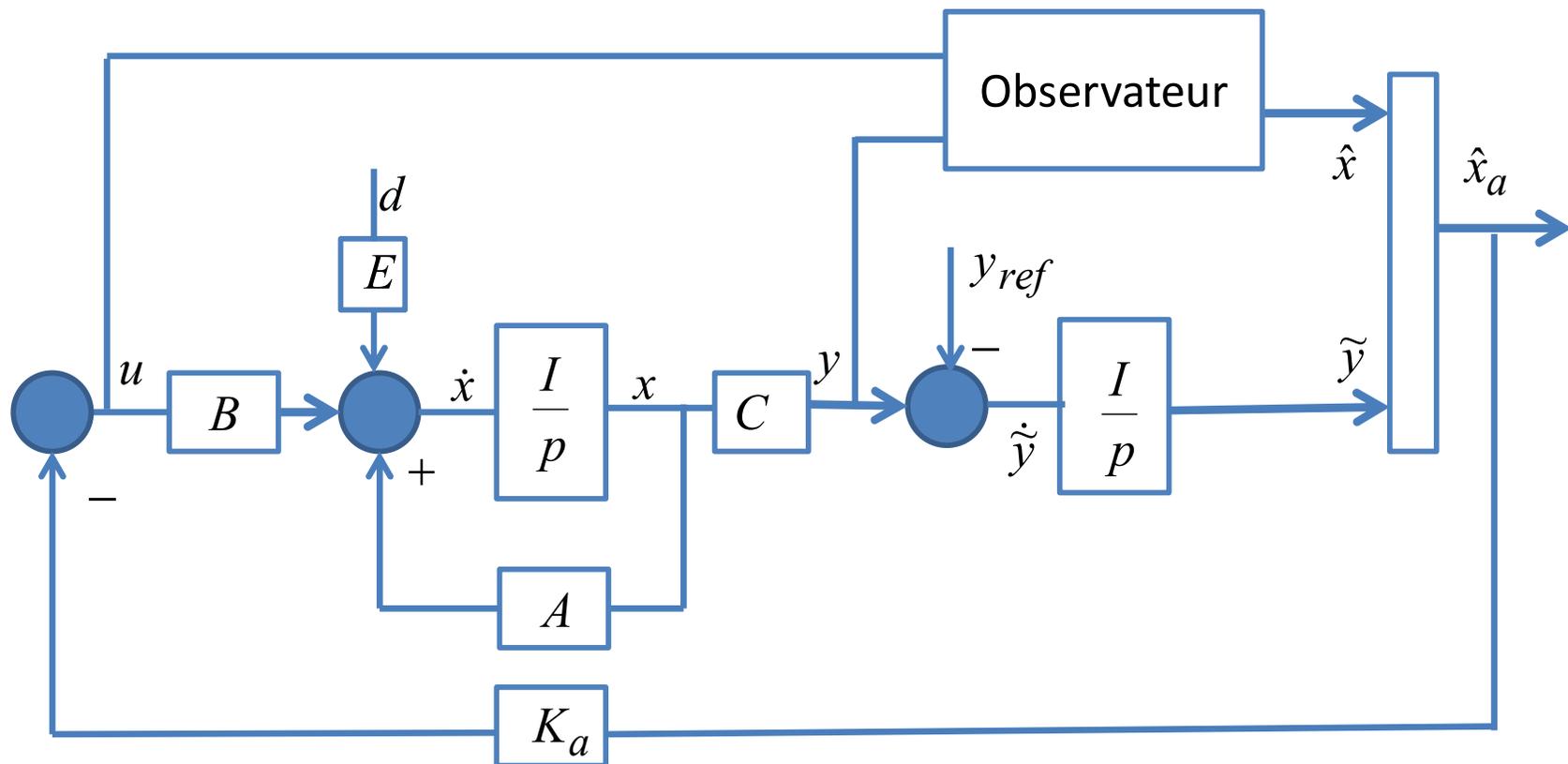
indépendamment :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} y_{ref}$$

- Complétez le système ci-dessus et expliquez pourquoi cette indépendance est respectée.

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Schéma bloc compact



## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Boucle fermée :

- Compléter le système

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} y_{ref} \\ y = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} \end{cases}$$

### □ Déduire les fonctions

- Sensibilité Sortie/Perturbation

✓ 
$$S_{yd}(p) = \frac{y(p)}{d(p)}$$

- Sensibilité Complémentaire T

✓ 
$$T_{yy_{ref}}(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)}$$

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Exercice:

- On considère le système 
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d \\ y = (1 \quad 0)x \end{cases}$$

- Objectif

- ✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

- Solution

- ✓ Donner le système augmenté
  - ✓ Déterminer Ka tel que la dynamique de la BF soit fixée en -1
    - Pourquoi on ne peut pas fixer l'ensemble de la dynamique en -2
  - ✓ Déterminer L tel que la dynamique de l'Obs soit fixée en -2
  - ✓ Déduire les transferts : S et T
  - ✓ Tracer les modules
  - ✓ Conclure.

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

→ Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

→ Passage Régulateur-Observateur en RST

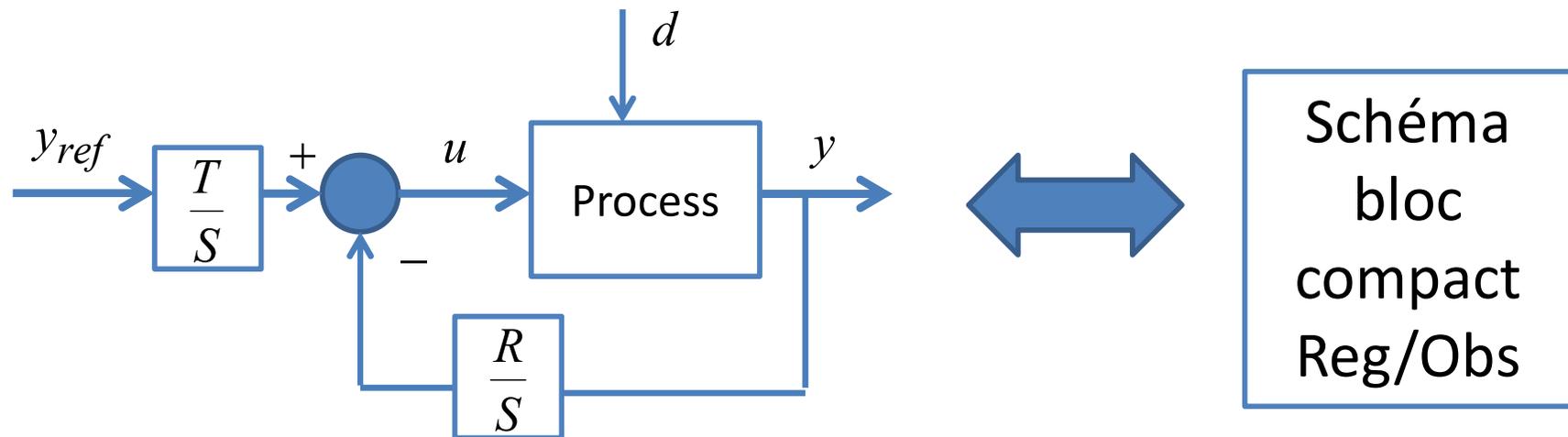
Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

## V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

### ❑ Schéma bloc RST



### ❑ Retrouvez à partir du RST les fonctions S et T du Reg/Obs

# V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

## □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

## □ Solution

- Commande Reg/Obs:

✓ Etat augmenté avec effet intégral :  $u = -K_a \hat{x}_a$

- Commande RST:

✓ Fonctions de transfert  $u = \frac{T}{S} y_{ref} - \frac{R}{S} y$

## V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

□ Solution : Poser la représentation associée

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} y_{ref} \\ u = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

□ Complétez les éléments ci-dessus et déduire à partir de cette représentation les polynômes R, S et T :

$$\frac{T}{S} = \frac{u}{y_{ref}} \Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \quad -\frac{R}{S} = \frac{u}{y} \Big|_{y_{ref}=0} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

➔ Partie 2 : Commande Optimale

➔ Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

- Principe d'optimalité de Bellman

Dans un processus d'optimisation dynamique, une suite de décisions est optimale si, quels que soient l'état et l'instant considérés sur la trajectoire qui lui est associée, les décisions ultérieures constituent une suite optimale de décisions pour le sous-problème dynamique ayant cet état et cet instant comme conditions initiales.

- Application :

- Recherche du plus court chemin
- Recherche du gain optimal  $K$  qui minimise l'énergie

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt$$

**Problème LQ** : On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'objectif est de déterminer le gain optimal  $K$  tel que la commande  $u=Kx$  minimise le critère

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt$$

où  $Q = Q^T \geq 0$      $R = R^T > 0$

sont des matrices de pondérations fixées selon les objectifs souhaités ...

# LQ à horizon infini : cas continu

- Critère

$$\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) dt$$

- Contrainte

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Solution

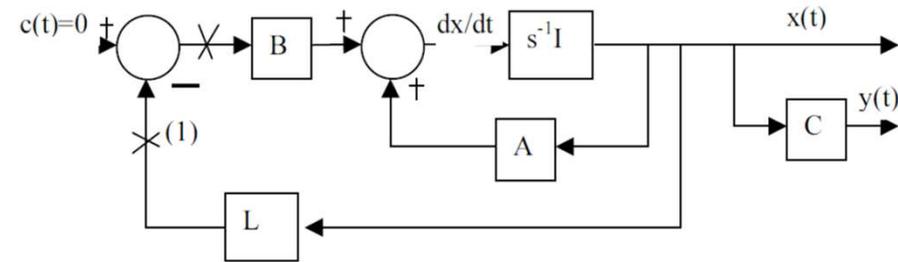


Schéma général de la commande LQ

$$u_t^* = -R^{-1} B^T P x_t$$

$$0 = Q + A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P$$

Pour implémenter une commande linéaire quadratique (LQ) en **MATLAB**, vous pouvez utiliser la fonction `lqr`. Voici un exemple de code pour un système de deuxième ordre où l'on calcule la matrice de gain `K` avec une commande LQ à pondération unitaire et l'on compare les réponses indicielle du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

```
% Définir les matrices de l'espace d'état
A = [-1, -2; 1, 0]; B = [2; 0]; C = [0, 1]; D = 0;

% Créer le système d'état
sys = ss(A, B, C, D);

% Définir les matrices de pondération pour les états (Q) et les entrées (R)
Q = [1, 0; 0, 1]; R = 1;

% Calculer la matrice de gain K pour la commande LQ
[K, S, e] = lqr(A, B, Q, R);

% Vérifier les pôles en boucle fermée
Acl = A - B * K; sys_cl = ss(Acl, B, C, D); poles_cl = pole(sys_cl);

% Afficher les pôles en boucle fermée
disp('Pôles en boucle fermée :'); disp(poles_cl);

% Comparer la réponse indicielle du système en boucle ouverte et en boucle fermée
figure;
step(sys);
hold on;
step(sys_cl);
legend('Boucle ouverte', 'Boucle fermée');
```

Exemple 3  
CODE MATLAB

Commande LQ

- On considère le système

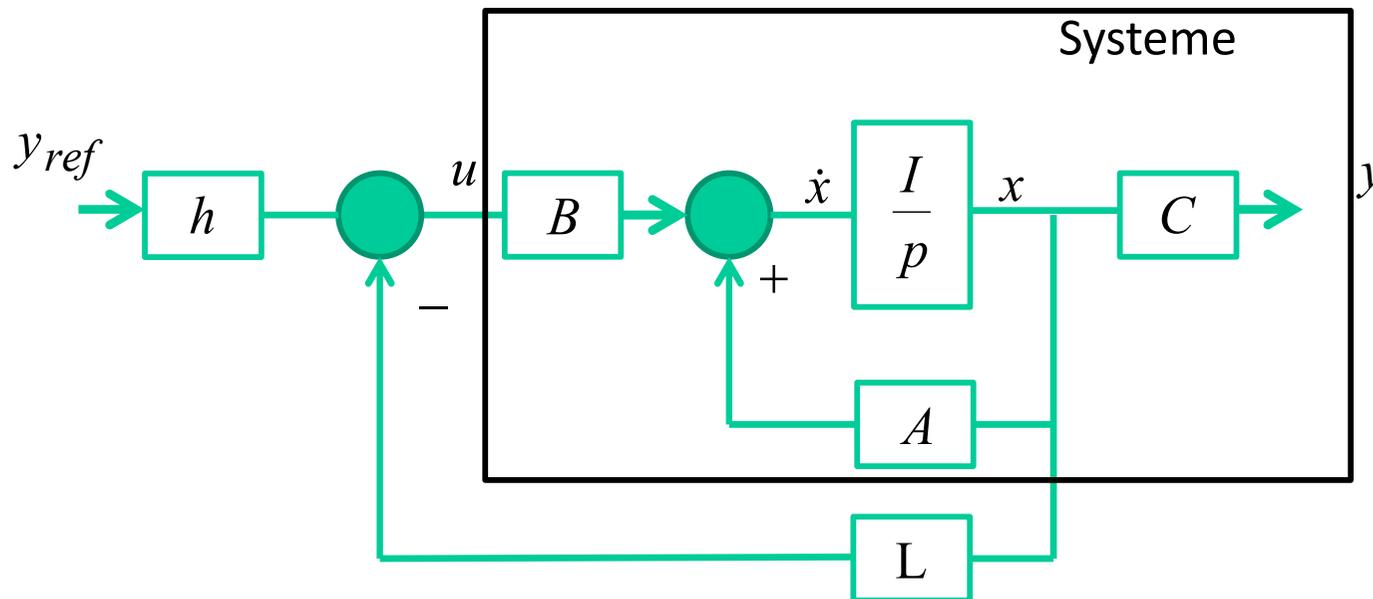
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- Avec

$$\varepsilon(t) = y_{ref}(t) - y(t)$$

Où l'objectif est de suivre une référence  $y_{ref}(t)$  constante



- Il convient d'appliquer la commande optimale

$$u(t) = -Lx(t) + hy_{ref}(t)$$

- Où L est le gain optimal :  $L = R^{-1}B^T P$
- et P la solution positive de l'ARE  $Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = 0$
- Le paramètre h est un pré filtre égal à l'inverse du gain statique de la BF optimisée, soit :

$$h = -\left(C(A - BL)^{-1}B\right)^{-1}$$

## LQ à horizon infini : cas discret

- Critère  $\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k]$
- Contrainte  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
- Solution
  - Gain  $u^* = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A x$
  - EAR  $P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$

# Application LQ à horizon infini : cas discret

Exercice: Pour  $x_{k+1} = 2x_k + u_k$  déterminer la commande  $u$  qui stabilise  $x$  et minimise

$$\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T x_k + u_k^T R u_k]$$

Résolution pour  $T_f \rightarrow \infty$ . 
$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

$$L = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

$P_{T_f} = 0$ pour $T_f \rightarrow \infty$	R=0.1	R=1	R=10	R=100
Gain	L=1.86	L=1.62	L=1.51	L=1.5
Valeur propre de la BF (i.e., $\text{eig}(A-BL)$ )	0.13	0.38	0.48	0.5
Sol P de ARED	P=1.37	P=4.23	P=31.3	P=301

On constate que plus le poids sur la commande est important plus le système bouclé est lent (la dynamique de BF s'écarte du centre du cercle unité). Cela est normal car on pénalise la commande, en d'autre terme on restreint son évolution. L'énergie dépensée par la commande coûte très cher.

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

→ Partie 2 : Commande Optimale

→ Commande LQ, **robustesse** et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

# Propriétés de robustesse de la commande LQ

Quand la solution, existe on aura toujours

**Exemple 1** *On considère le système continu*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ y = x \end{cases}$$

marge de module  $\geq 1$   
 marge de gain  $\infty$   
 marge de phase  $\geq 60^\circ$

où  $a \in \mathbb{R}^1$  et le critère  $J$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^2 + Ru^2) dt$$

1. Déterminer la commande  $u$  qui minimise le critère  $J$  sous la contrainte du système (1.6).
2. Donner le transfert de boucle, pour  $a = -1$  et  $R = \frac{1}{3}$ , tracer le nyquist associé et la fonction de sensibilité  $S_u$ .

**Solution**

$$ARE : P^2 - 2aRP - R = 0$$

$$P^+ = aR + \sqrt{(aR)^2 + R}$$

$$u = - \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

$$BF : \dot{x} = - \left( \sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

On obtient la commande optimale suivante

$$u = - \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

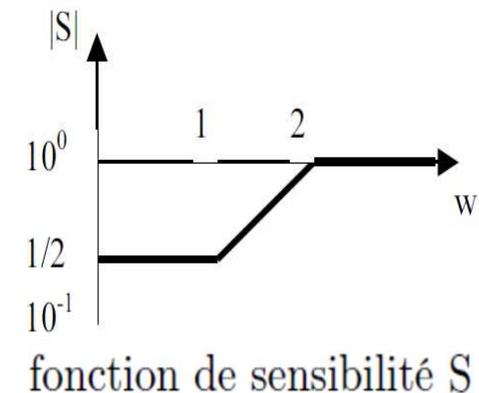
pour  $R \rightarrow \infty$  la boucle fermée présente un mode  $s = -|a|$ , donc si le système (1.6) est instable  $\Re(a) \geq 0$  on obtient une commande  $u = -(a + |a|)x = -2|a|x$  et pour un mode stable  $\Re(a) < 0$  on obtient une commande nulle.

2. Donner le transfert de boucle, pour  $a = -1$  et  $R = \frac{1}{3}$ , tracer le nyquist associé et la fonction de sensibilité  $S_u$ .

**Solution**

$$L_c(s) = L(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s + 1}$$

$$S_u(s) = \frac{1}{2} \frac{s + 1}{\frac{s}{2} + 1}$$



# Application: propriétés de robustesse

Le nyquist du transfert de boucle  $L_c(jw)$  donne

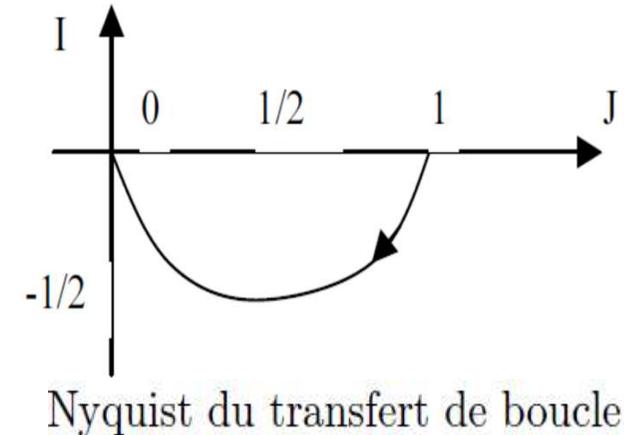
$$L_c(jw) = \frac{1}{jw + 1} = \frac{1}{1 + w^2} - \frac{jw}{1 + w^2}$$

$$\Re = \frac{1}{1 + w^2} > 0, \quad I = -\frac{w}{1 + w^2} < 0, \quad \frac{J}{\Re} = -w$$

$$\Rightarrow \Re = \frac{1}{1 + \left(\frac{J}{\Re}\right)^2} \Leftrightarrow \Re^2 + J^2 - \Re = 0 \Leftrightarrow \left(\Re - \frac{1}{2}\right)^2 + J^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

soit un cercle de centre  $\left( \frac{1}{2}, 0 \right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ . On obtient dès lors les marges de robustesse suivante (voir figure 1.8)

- marge de module 1
- marge de gain  $\infty$
- marge de phase  $90^\circ$



# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

➔ Partie 2 : Commande Optimale

➔ Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

## Observateur LQ : principe de dualité

- On propose l'observateur suivant, dont l'objectif est d'estimer l'état réel  $x$  :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) ; \hat{y} = C\hat{x}$$

- Analyse de convergence de l'erreur d'estimation d'état :  $\dot{e}(t) = (A - GC)e(t)$ 
  - Sachant que les valeurs propres de  $A-GC$  sont également les valeurs propres de  $A^T - C^T G^T$
  - Le problème d'estimation est par dualité équivalent à un problème de commande du système fictif suivant :

$$\dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T h(t)$$

- Avec  $h^* = -G^T z$
- Cette commande optimale assure la stabilité de  $A^T - C^T G^T$  et donc par transposition de l'erreur d'estimation d'état.

## Approche selon le principe de dualité

- On s'ait finalement ramené à un problème de commande optimale identique à la première partie du cours.
- En conclusion, il suffit d'appliquer le principe de dualité et remplacer les matrices par les relations suivantes :

$$A \rightarrow A^T$$

$$B \rightarrow C^T$$

$$L \rightarrow G^T$$

$$-\dot{P} \rightarrow \dot{M}$$

$$M = M^T > 0$$

- Rappel de la structure de l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) ; \hat{y} = C\hat{x}$$

- Critère

$$\min_w J(w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T Q z + h^T R h) dt$$

- Système fictif

$$MA^T + AM - MC^T R^{-1} CM + Q = 0$$

$$G = MC^T R^{-1}$$

$$\dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T h(t)$$

# Commande avancée

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

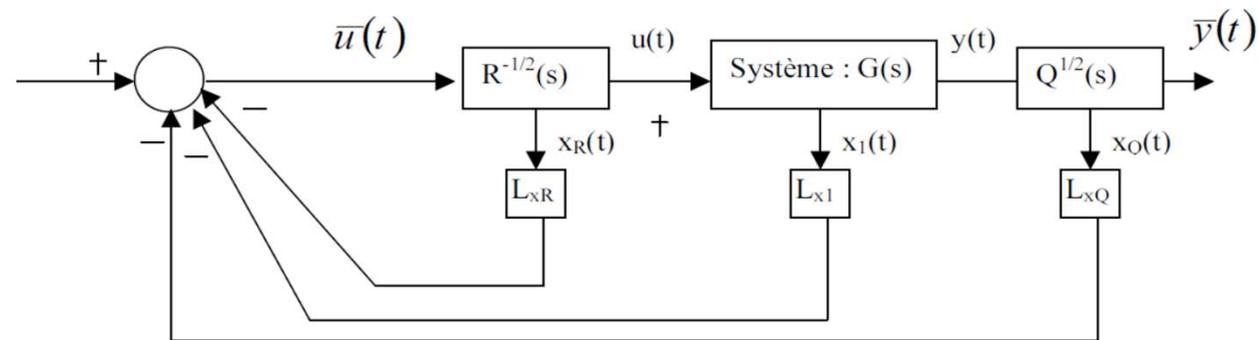
➔ Partie 2 : Commande Optimale

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

➔ Commande LQ à pondération fréquentielle

# Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Principe



- Modeler le transfert de boucle afin de satisfaire au mieux le compromis Performance/Robustesse.

- Solution

- Appliquer le principe du théorème de Parseval

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (y^T Q y + u^T R u) dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( y_{(jw)}^* Q_{(jw)} y_{(jw)} + u_{(jw)}^* R_{(jw)} u_{(jw)} \right) dw$$

## Commande LQ à pondérations fréquentielles

- On montre que le problème de synthèse LQ à pondération fréquentielle, peut se ramener à un problème de synthèse LQ temporel à pondération unitaire.
- Explication:

– Le critère  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( y_{(jw)}^* Q_{(jw)} y_{(jw)} + u_{(jw)}^* Q_{(jw)} u_{(jw)} \right) dw$

peut se réécrire sous la forme

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( y_{(jw)}^* Q_{(jw)}^{*1/2} Q_{(jw)}^{1/2} y_{(jw)} + u_{(jw)}^* R_{(jw)}^{*1/2} R_{(jw)}^{1/2} u_{(jw)} \right) dw$$

En posant  $\bar{y} = Q_{(jw)}^{1/2} y_{(jw)}$  et  $\bar{u} = R_{(jw)}^{1/2} u_{(jw)}$

on obtient le critère temporel à pondération unitaire suivant :

$$\longleftrightarrow \int_0^{\infty} \left( \bar{y}_{(t)}^T \bar{y}_{(t)} + \bar{u}_{(t)}^T \bar{u}_{(t)} \right) dt$$

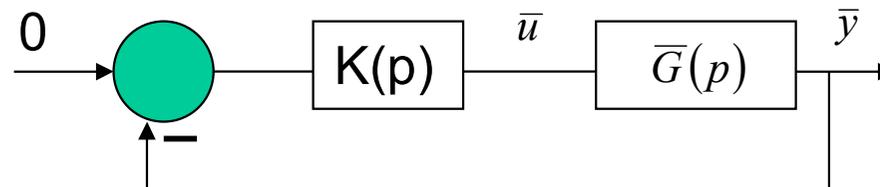
# Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Conclusion

- La synthèse se réduit à un problème de commande LQ à pondération unitaire :

$$\int_0^{\infty} (\bar{y}_{(t)}^T \bar{y}_{(t)} + \bar{u}_{(t)}^T \bar{u}_{(t)}) dt$$

- sous la contrainte du système augmenté:  $\bar{G}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{u}(p)} = R_{(p)}^{-1/2} G(p) Q_{(p)}^{1/2}$



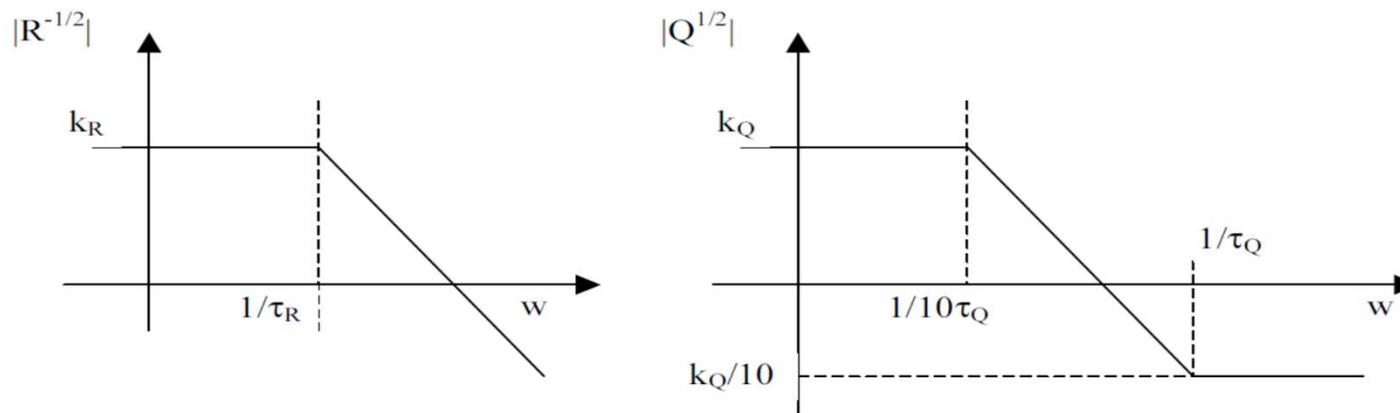
# Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Le système augmenté  $\bar{G}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{u}(p)} = R_{(p)}^{-1/2} G(p) Q_{(p)}^{1/2}$  peut être décomposé selon la représentation d'état suivante :

$$R_{(p)}^{-1/2} : \begin{cases} \dot{x}_R = A_2 x_R + B_2 \bar{u} \\ u = C_2 x_2 + D_2 \bar{u} \end{cases} \quad Q_{(p)}^{1/2} : \begin{cases} \dot{x}_Q = A_3 x_Q + B_3 y \\ \bar{y} = C_3 x_Q + D_3 y \end{cases}$$

$$G(p) : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

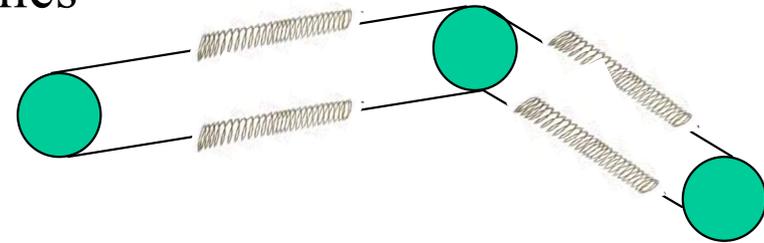
où les pré et post filtres  $R^{-1/2}$  et  $Q^{1/2}$  prennent généralement la forme suivante



## Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Le pré filtre  $R^{-1/2}(s)$  permet une décroissance plus rapide hors de la bande passante du système et donc une amélioration de la Robustesse.
- Le post filtre  $Q^{1/2}(s)$  permet un accroissement de la pente dans la bande passante du système (augmentation du gain en basse fréquence) et donc une amélioration des performances.
- Exemple :
  - Poser  $R^{-1/2}(s) = k/(p+1)$  et  $Q^{1/2}(s) = (p+1)/p$  donne un transfert  $\left(\frac{Q(p)}{R(p)}\right)^{1/2} = \frac{k}{p}$  intégrateur dont le paramètre  $k$  permet d'ajuster la bande passante et le compromis P/R.

- Transmission élastique composée de 3 poulies



- On considère un système de transmission élastique composé de 3 poulies reliées par deux courroies métalliques comportant chacune deux ressorts. Le problème de commande considéré est celui de l'asservissement en position de la troisième poulie à partir de la position de la première poulie.
- Pour la synthèse du régulateur, un modèle du système nominal à vide obtenu par identification est donné par le transfert suivant

$$G(s) = \frac{-3.434s^3 + 244.3s^2 - 1.021e^4s + 1.753e^5}{s^4 + 2.411s^3 + 1260s^2 + 1296s + 1.647e^5}$$

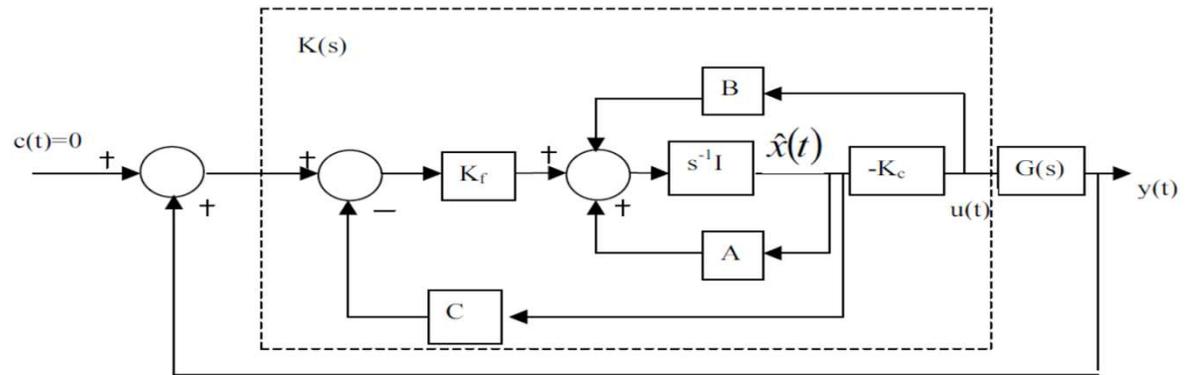
- Ce système est supposé soumis à une référence  $y_{\text{ref}}$  et à une perturbation en sortie  $dy$ . On propose de comparer les performances d'un régulateur LQG sans pondération fréquentielle et d'un régulateur LQG à pondération fréquentiel incluant un intégrateur dans la boucle.

- Régulateur  $LQG$  sans pondération fréquentielle, donc à pondérations fixes  $Q_r = C^T C$  et  $R_r = 1$  pour le régulateur optimal LQ et avec  $Q_0 = B B^T$  et  $R_0 = 1$  pour l'observateur
- Sous matlab :

```
%Procédé
G=tf([-3.434 244.3 -1.021e4 1.753e5], [1 2.411 1260 1296 1.647e5]);
[numG,denG]=tfdata(G,'v');
%representation d'état
[A,B,C,D]=tf2ss(numG,denG);
%regulateur 1 sans ponderation fréquentielle
[KcR1,Sc1,Ec1]=lqr(A,B,C'*C,1);
% Observateur 1 sans ponderation ponderation fréquentielle
[KoR1,So1,Eo1]=lqr(A',C',B*B',1);
KoR1=KoR1';
```

# Régulateur $LQ$ sans pondération fréquentielle

- Il reste à déduire  $K(s)$



Où la fonction reg retourne directement  $K(s)$

```
[Ar,Br,Cr,Dr] = reg(A,B,C,D,KcR1,KoR1);
[numK,denK]=ss2tf(Ar,Br,Cr,Dr);
K_ =tf(numK,denK);
```

On en déduit directement le tracé des fonctions usuelles

```
%sensibilité complémentaire T=I-S
T1=feedback(series(K_,G),1);
%sensibilité
S1=feedback(1,series(K_,G));
%controller*sensitivity
KS1=series(K_,S1);
%plant*sensitivity
GS1=series(G,S1);
```

## Régulateur $LQ$ avec pondération fréquentielle

- On se propose d'ajouter un effet intégrateur avec l'aide des pré et post filtres  $R^{-1/2}(s)$  et  $Q^{1/2}(s)$ .

```

%Systeme augmenté
k=1; %permet de jouer sur la Bande Passante
GI=tf([k],[1 0]); %integrateur
Ga=series(G,GI); %système augmenté
[numG,denG]=tfdata(G,'v');
[A,B,C,D]=tf2ss(numG,denG);
[numGI,denGI]=tfdata(GI,'v');
% Representation d'état du sys augmenté Ga
[AGI,BGI,CGI,DGI]=tf2ss(numGI,denGI);
Aa=[A zeros(size(A,1),size(AGI,2));BGI*C AGI];
Ba=[B;zeros(size(AGI,1),1)];
Ca=[DGI*C CGI];
Da=0;

```

## Régulateur $LQ$ avec pondération fréquentielle

Il reste à déterminer par synthèse LQ ordinaire le gain du contrôleur et de l'observateur sur le système augmenté

```
[KcR2,Sc2,Ec2]=lqr(Aa,Ba,Ca'*Ca,1); %regulateur
[KoR2,So2,Eo2]=lqr(Aa',Ca',Ba*Ba',1); %Observateur
KoR2=KoR2';
```

On en déduit le régulateur  $K(s)$

```
[Ar2,Br2,Cr2,Dr2] = reg(Aa,Ba,Ca,Da,KcR2,KoR2);
[numK3,denK3]=ss2tf(Ar2,Br2,Cr2,Dr2);
K3=tf(numK3,denK3);
```

Que l'on augmente de l'effet intégrateur  $k/p$

```
K3a=series(K3,GI); %Correcteur augmenté de l'integrateur
```

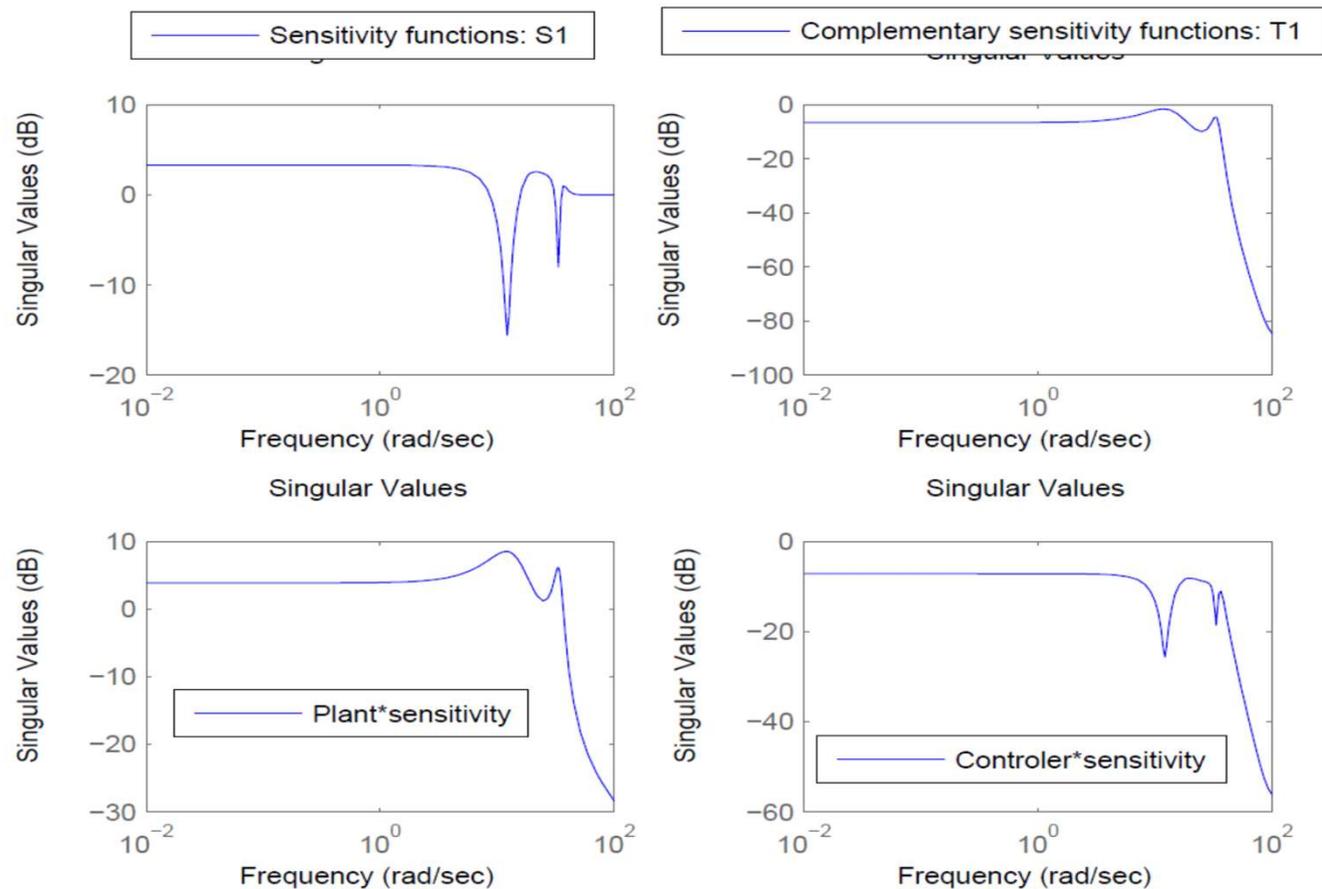
# Tracés des fonctions de sensibilités usuelles

- Calcul de S et T
 

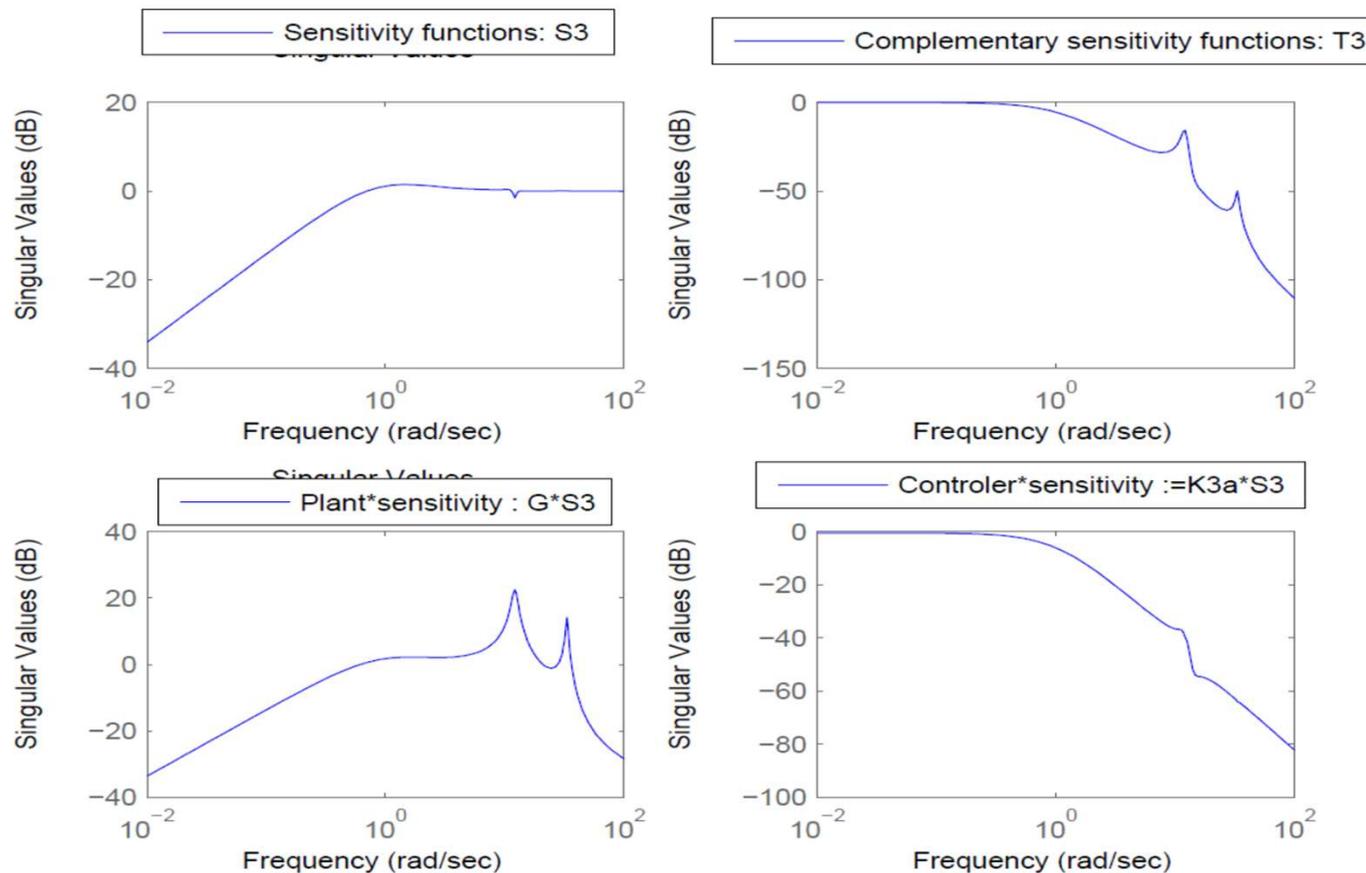
```
S3=feedback(1,series(K3a,G));
T3=feedback(series(K3a,G),1);
[MAG,PHASE] = bode(S3);
ModuleMargeS3=inv(max(MAG))
```
- Tracés
 

```
figure(3)
subplot(2,2,1), sigma(S3,{WMIN,WMAX});
legend('Sensitivity functions : S3');
subplot(2,2,2), sigma(T3,{WMIN,WMAX});
legend('Complementary sensitivity functions : T3');
subplot(2,2,3), sigma(series(G,S3),{WMIN,WMAX});
legend('Plant*sensitivity : G*S3');
subplot(2,2,4), sigma(series(K3a,S3),{WMIN,WMAX});
legend('Controler*sensitivity :=K3a*S3');
```

- Modules des transferts S, SK, SG et T avec le régulateur 1 (sans pondérations)



- Modules des transferts S, SK, SG et T avec le régulateur 2 (avec pondérations fréquentielles de type intégrateur)



# Conclusion

Introduction aux systèmes asservis

Rappel : Représentation externe et stabilité

Partie 1 : Commande par placement de pôles

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état  $x$  et par retour d'état estimé

Passage Régulateur-Observateur en RST

Partie 2 : Commande Optimale LQ ( $MG \infty$ ,  $MM > 1$ ,  $MP > 60^\circ$ )

Commande LQ, robustesse et Observateur LQ

Commande LQ à pondération fréquentielle

Perspectives : Commande robuste, Commande  $H^\infty$ , Détection et localisation de défauts capteurs – actionneurs -composants