

Plan de la présentation

- Principe d'optimalité de Bellman
Application: recherche du plus court chemin
- Synthèse LQ
Commande LQ, Stabilité et Robustesse
Observateur LQ, Filtre de Kalman
- Synthèse LQG/LTR
- Commande LQ à pondérations fréquentielles
Étude de cas

8sc cours, 4 sc TD, 3 sc TP

Pondérations 25%TP, 75%Exam

- Principe d'optimalité de Bellman

Dans un processus d'optimisation dynamique, une suite de décisions est optimale si, quels que soient l'état et l'instant considérés sur la trajectoire qui lui est associée, les décisions ultérieures constituent une suite optimale de décisions pour le sous-problème dynamique ayant cet état et cet instant comme conditions initiales.

- Rappel : pour un système MIMO à n états et m commandes, le gain K solution du problème de commande présente :

- $n*m$ paramètres dont $n*m-n$ paramètres libres

⇒ Il y a donc une infinité de solutions.

On propose ici de rechercher les paramètres du gain tels que la commande obtenue minimise un critère énergétique ...

Problème 1

Un véhicule à essence est modélisé par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t) \\ \dot{S}(t) &= -\frac{1}{2}u^2(t)\end{aligned}$$

avec pour conditions initiales $x(0) = 0$, et $S(0) = 1$. La commande u caractérise une vitesse, x la distance parcourue et S le niveau du réservoir de carburant. La deuxième équation modélise le fait que la consommation augmente en raison quadratique de la vitesse (intuitivement cette hypothèse est valide). Sur un horizon $T=1$, on souhaite parcourir la distance $x(T)$ la plus grande possible.

1. Calculer la commande optimale $u^*(t)$ maximisant la distance parcourue en utilisant la totalité du carburant disponible.
2. En déduire la distance maximale parcourue

Problème 2: Gestion de stock

Un fermier produit un certain type de céréale à reproduction rapide. Après chaque récolte, il peut stocker une partie de sa production et réutiliser le reste comme engrais pour la nouvelle récolte.

Partant de l'instant $t = 0$, il souhaite maximiser son stock à une date donnée $T = 10$, pour le vendre en totalité à la date T .

On note à l'instant t

$x_1(t)$ le niveau de production

$u(t)$ la part de production servant d'engrais pour la production suivante

$v(t)$ la part de production stockée

avec $x_1(0) = 100$ le stock initial acheté.

On propose le modèle suivant

$$\dot{x}_1 = u$$

sous la contrainte algébrique $x_1(t) = u(t) + v(t)$.

Questions :

1. A l'aide de la variable $x_2(t)$, quantité totale stockée à l'instant t , poser et résoudre un problème de commande optimale.

Problème LQ : On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'objectif est de déterminer le gain optimal K tel que la commande $u=Kx$ minimise le critère

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt$$

où $Q = Q^T \geq 0$ $R = R^T > 0$

sont des matrices de pondérations fixées selon les objectifs souhaités ...

Problème 3: Estimateur optimal de Kalman

- Horizon fini : on considère à nouveau le critère

$$\min_w J(w) = (x_{t_0} - \hat{x}_{t_0})^T S^{-1} (x_{t_0} - \hat{x}_{t_0}) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\begin{array}{c} (y - \hat{y})^T R^{-1} (y - \hat{y}) \\ + (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu)^T Q^{-1} (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu) \end{array} \right) d\tau$$

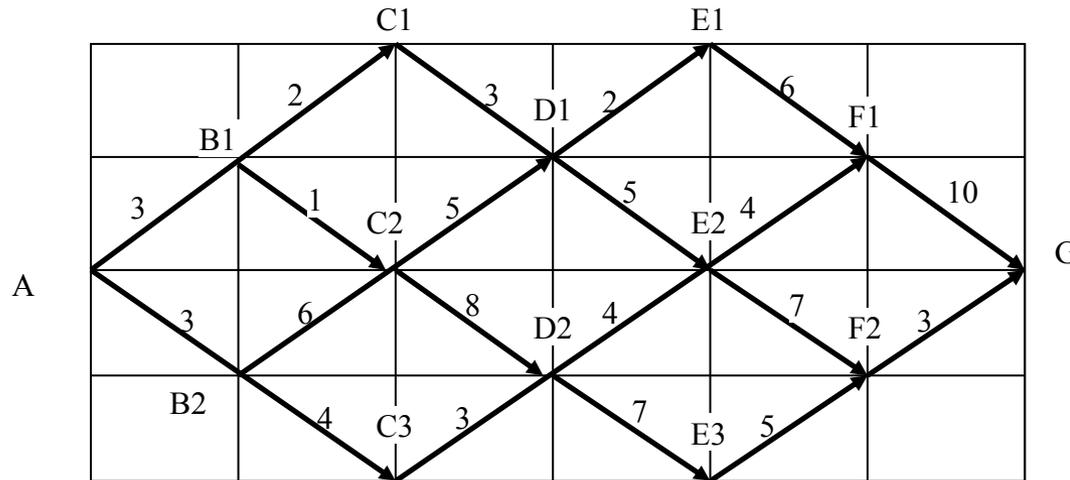
où $\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu = w$ et $y - \hat{y} = Ce$

Pour une grande dispersion sur le processus w (i.e. variance des bruits de structure grande) correspond un crédit (coût) faible accordé à l'équation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ d'où un choix de Q^{-1} petit dans le critère déterministe.

Pour une petite dispersion sur les mesures y (i.e., variance des bruits de mesure faible) correspond un crédit fort accordé à l'équation de mesure $y = Cx$ et donc au terme de correction $G(y - C\hat{x})$ d'où un choix R^{-1} grand dans le critère déterministe et un gain G grand.

Application du principe d'optimalité de Bellman

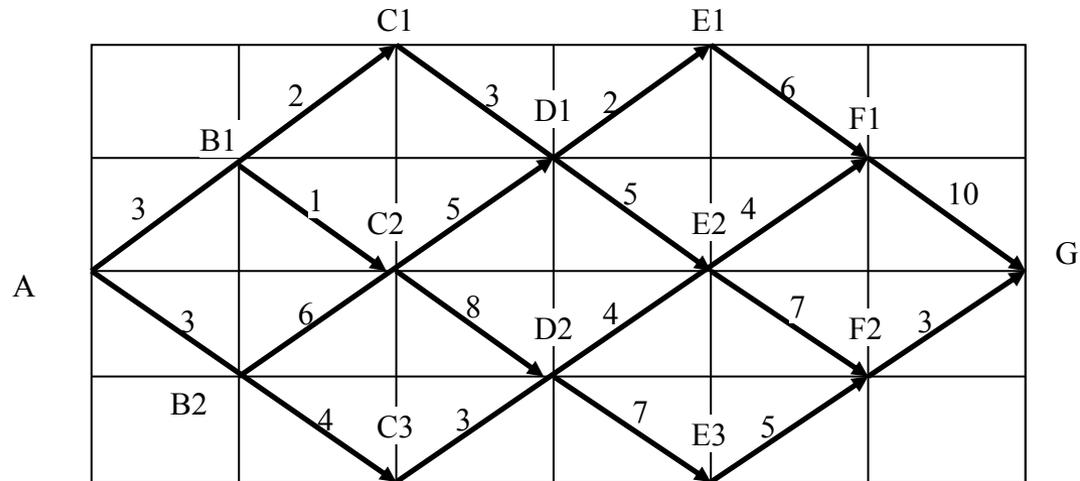
On s'intéresse ici à rechercher le chemin de distribution de l'eau le moins coûteux entre les villes A et G, lesquelles sont reliées par différentes villes



Chaque arrête représente le coût d'acheminement de l'eau entre 2 villes, par exemple entre F1 et G, le coût est de 10 euros

Exemple : Recherche du chemin à coût minimal

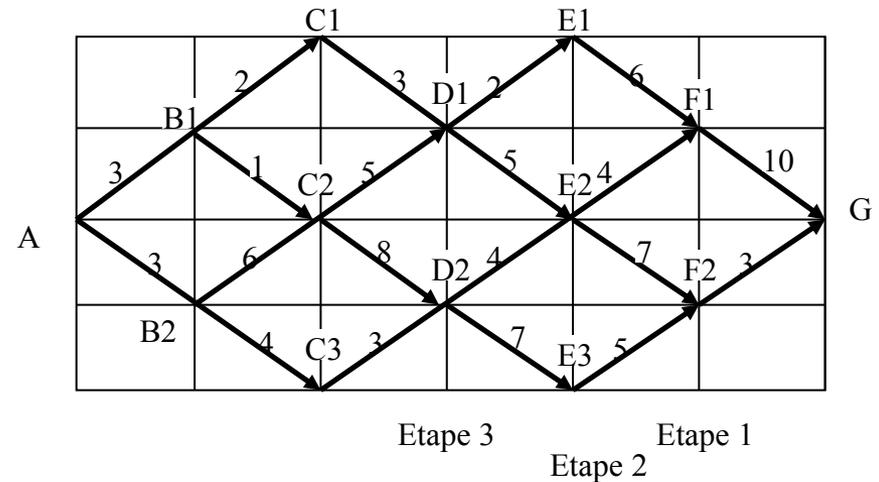
On considère le réseau de distribution d'eau suivant :



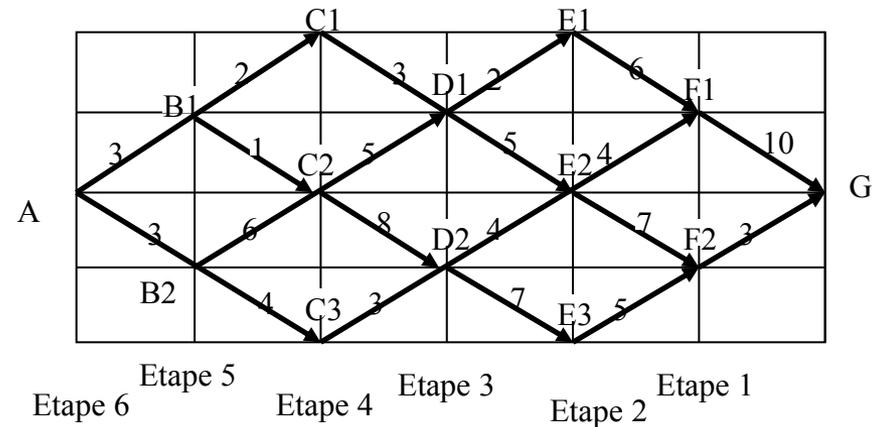
- Déterminer d'après le principe de Bellman le chemin de coût minimal (plus court chemin) qui permet de relier A à G.
- On notera :
 - $d(P,Q)$ la distance entre P et Q
 - $L(P)$ la longueur du plus court chemin (coût optimal) entre un point P quelconque du graphe et le point G.
 - On recherche donc $L(A)$.

Solution

- Etape 1 :
 - de F1, on a $L(F1) = d(F1,G) = 10$
 - de F2, on a $L(F2) = d(F2,G) = 3$
- Etape 2 :
 - de E1, on a $L(E1) = d(E1,F1) + L(F1) = 16$
 - de E2, on a $L(E2) = \min\{d(E2,F1) + L(F1), d(E2,F2) + L(F2)\}$
 $= \min\{4 + 10, 7 + 3\} = 10$
 - de E3, on a $L(E3) = d(E3,F2) + L(F2) = 8$
- Etape 3 :
 - de D1, on a $L(D1) = \min\{d(D1,E1) + L(E1), d(D1,E2) + L(E2)\}$
 $= \min\{2 + 16, 5 + 10\} = 15$
 - de D2, on a $L(D2) = \min\{d(D2,E2) + L(E2), d(D2,E3) + L(E3)\}$
 $= \min\{4 + 10, 7 + 8\} = 14$



Suite de l'exercice



- Etape 4 :
 - de C1, on a $L(C1) = d(C1,D1)+L(D1) = 3+15 = 18$
 - de C2, on a $L(C2) = \min\{d(C2,D1)+L(D1), d(C2,D2)+L(D2)\}$
 $= \min\{5+15, 8+14\} = 20$
 - de C3, on a $L(C3) = d(C3,D2)+L(D2) = 3+14 = 17$
- Etape 5 :
 - de B1, on a $L(B1) = \min\{d(B1,C1)+L(C1), d(B1,C2)+L(C2)\}$
 $= \min\{2+18, 1+20\} = 20$
 - de B2, on a $L(B2) = \min\{d(B2,C2)+L(C2), d(B2,C3)+L(C3)\}$
 $= \min\{6+20, 4+17\} = 21$
- Etape 6 :
 - de A, on a $L(A) = \min\{d(A,B1)+L(B1), d(A,B2)+L(B2)\}$
 $= \min\{3+20, 3+21\} = 23$

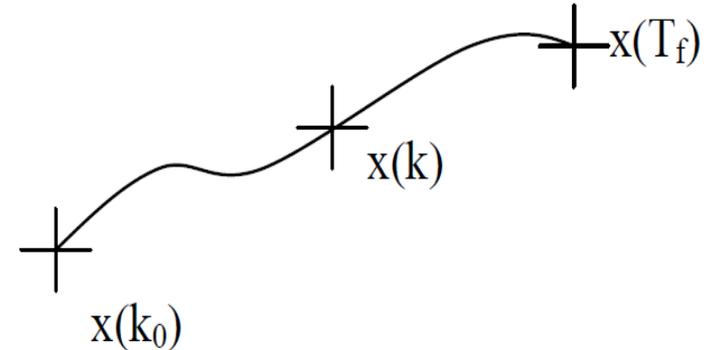
Parallèle avec l'Automatique : Commande LQ

On considère le système à temps discret

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

où le critère à minimiser est :

$$\min_u J(u) = J(x(k), k) = \frac{1}{2} \sum_{j=k_0}^{T_f-1} [x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$



Le problème consiste à déterminer la trajectoire unique reliant les points $x(k_0)$ et $x(T_f)$ telle que cette trajectoire est optimale au sens où elle minimise le critère énergétique J sous la contrainte de la dynamique du modèle $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

Remarque : J représente la somme des coûts pour aller de $x(k_0)$ à $x(T_f)$, notre travail consiste à trouver u telle que ce coût soit le plus petit possible.

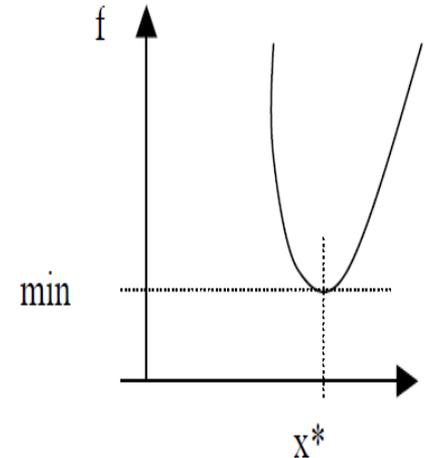
Rappel: recherche du minimum de $f(x)$

Hyp: f de classe C_2

Si x^* est un minimum local de la fonction f alors

$$f(x^* + h) - f(x^*) \geq 0$$

$$= 0 \text{ pour } h = 0$$



On applique un DL à l'ordre 2 de $f(x^*+h)$ autour de x^* ,

$$f(x^* + h) = f(x^*) + h \frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} + O^3$$

$$\text{soit } f(x^* + h) - f(x^*) \geq 0 \Leftrightarrow h \frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} \geq 0$$

- $h > 0$, on en déduit $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{2}h \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} > 0$
- $h < 0$, on en déduit $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{2}h \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} < 0$
- comme, h est proche de 0 alors

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} = 0 \quad \text{est une condition nécessaire}$$

Conditions pour un minimum

Pour que x^* soit un minimum et non un maximum il faut de plus

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} > 0$$

Soit les conditions suivantes :

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} = 0$$

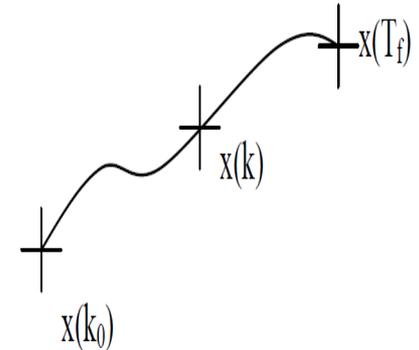
$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} > 0$$

Notations :

Le coût associé au point final est

$$J_{\text{opt}}(x(T_f), T_f) = J^*(x(T_f), T_f) = \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

où le poids final P_{T_f} est donné par le designer.



Le coût associé pour aller du point $x(k)$ au point final est

$$\min_u J(u) = J(x(k), k) = \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{T_f-1} [x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f} = \frac{1}{2} x_k^T P_k x_k$$

où P_k est un coût à déterminer

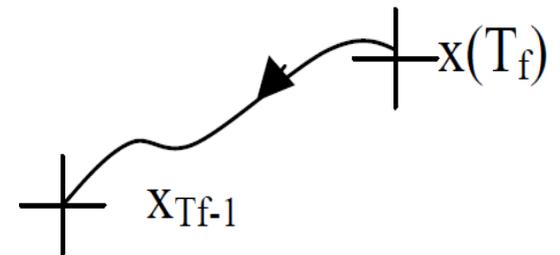
Application du principe de Bellman

- Partant de pt final $x(T_f)$ connu au point précédent $x(T_f-1)$. La dernière trajectoire à minimiser est alors donnée par le coût suivant :

$$\begin{aligned} \min_u J(u) &= J(x(T_f - 1), T_f - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[x_{T_f-1}^T Q_{T_f-1} x_{T_f-1} + u_{T_f-1}^T R_{T_f-1} u_{T_f-1} \right] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f} \end{aligned}$$

- sous la contrainte de la dynamique du système

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$



$$\text{Rappel : } \frac{\partial x^T A}{\partial x} = A \quad \frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T) x$$

Solution

- Etape 1
$$\left. \frac{\partial J(x(T_f - 1), T_f - 1)}{\partial u(T_f - 1)} \right|_{u=u^*} = 0$$

- On obtient une commande linéaire fonction de l'état

$$u_{T_f-1}^* = -\left(R_{T_f-1} + B^T P_{T_f} B\right)^{-1} B^T P_{T_f} A x_{T_f-1}$$

- Etape 2

$$\frac{\partial^2 J(x(T_f - 1), T_f - 1)}{\partial u_{T_f-1}^2} > 0$$

Soit

$$\frac{\partial J^2(x(T_f - 1), T_f - 1)}{\partial u^2(T_f - 1)} = \left(R_{T_f-1} + B^T P_{T_f} B\right) > 0$$

- Etape 3 : On remplace la solution u^* dans le critère partiel que l'on identifie au coût minimal désirée, i.e,

$$J(x(T_f - 1), u_{T_f - 1}^*, T_f - 1) = \frac{1}{2} x_{T_f - 1}^T P_{T_f - 1} x_{T_f - 1}$$

– Soit

$$P_{T_f - 1} = Q_{T_f - 1} + A^T P_{T_f} A - L_{T_f - 1}^T B^T P_{T_f} A$$

$$\Leftrightarrow P_{T_f - 1} = Q_{T_f - 1} + A^T P_{T_f} A - A^T P_{T_f} B \left(R_{T_f - 1} + B^T P_{T_f} B \right)^{-1} B^T P_{T_f} A$$

- EARD à temps rétrograde, déterminée hors ligne, i.e.,

$$Q_{T_f} \rightarrow P_{T_f} \rightarrow P_{T_f-1} \rightarrow L_{T_f-1} \rightarrow u_{T_f-1} \rightarrow P_{T_f-2} \rightarrow L_{T_f-2} \rightarrow u_{T_f-2} \rightarrow \dots$$

- Pour $x_{k+1} = 2x_k + u_k$ déterminer la commande u qui stabilise x et minimise

$$\min_u J(u) = J(x(0), 0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T x_k + u_k^T R u_k] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

- Avec $T_f=3$ et $P_{T_f}=1$, montrer respectivement pour $R=1$, $R=10$ et $R=1000$ l'influence de la pondération R sur les pôles de la BF.

1.a) **Résolution pour** $T_f = 3$, $R = 1$ et $P_{T_f} = P_3 = 1$

Il nous faut déterminer les commandes u_0^* , u_1^* et u_2^* . On applique le principe d'optimalité de Bellman.

- Nous commençons par déterminer la commande optimale u_2^* (voir figure 1.4) qui permettra de minimiser le coût partiel $J(x(2), 2)$ au départ d'un état x_2 quelconque :

$$\begin{aligned} J(x(2), 2) &= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{R}{2}u_2^2 + J(x(3), 3) \\ &= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{R}{2}u_2^2 + \frac{P_3}{2}x_3^2 \end{aligned}$$

sous la contrainte du système

$$x_3 = 2x_2 + u_2$$

La commande solution du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x(2), 2)}{\partial u(2)} &= \frac{\partial \left[\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{R}{2}u_2^2 + \frac{P_3}{2}(2x_2 + u_2)^2 \right]}{\partial u(2)} = Ru_2 + P_3(2x_2 + u_2) = 0 \\ \Leftrightarrow u_2^* &= -2(R + P_3)^{-1} P_3 x_2 = -x_2 \end{aligned}$$

Soit pour une commande optimale $u_2^* = -x_2$
un coût optimisé égale à

$$\begin{aligned} J(x(2), 2) &= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{R}{2}u_2^2 + J(x(3), 3) \\ &= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{R}{2}u_2^2 + \frac{P_3}{2}(2x_2 + u_2)^2 = \frac{1}{2}x_2^T 3x_2 \end{aligned}$$

– De la même façon nous déterminons u_1^*

$$\begin{aligned} J(x(1), 1) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + J(x(2), 2) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

sous la contrainte du système

$$x_2 = 2x_1 + u_1$$

– De la même façon nous déterminons u_0^*

- Si l'on itère les résultats précédents selon le principe de Hamilton Jacobi Bellman on trouve les résultats suivants :

$L_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$	$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k L_k$
$L_2 = 1$	$P_2 = 3$
$L_1 = \frac{3}{2}$	$P_1 = 4$
$L_0 = \frac{8}{5}$	$P_0 = \frac{21}{5} = 4.2$

pour $T_f = 3, R = 1$ et $P_{T_f} = P_3 = 1$

$L_2 = 0.1818$	$P_2 = 4.6364$
$L_1 = 0.6335$	$P_1 = 13.6708$
$L_0 = 1.1551$	$P_0 = 24.1015$

$L_2 = 0.0020$	$P_2 = 4.9960$
$L_1 = 0.0099$	$P_1 = 20.8847$
$L_0 = 0.0409$	$P_0 = 82.8297$

pour $T_f = 3, R = 10$ et $P_{T_f} = P_3 = 1$

pour $T_f = 3, R = 1000$ et $P_{T_f} = P_3 = 1$

Conclusion 1) quand R augmente la commande diminue. Cela est logique car le coût appliqué à la commande est relatif au poids R, de fait pour minimiser le coût J il faut maintenir une commande faible pour R grand.

Conclusion 2) Plus le poids sur le coût final est élevé plus la convergence vers zéro sera rapide.

LQ à horizon infini : cas discret

- Critère $\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k]$
- Contrainte $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
- Solution
 - Gain $u^* = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A x$
 - EAR $P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$

Application LQ à horizon infini : cas discret

Exercice: Pour $x_{k+1} = 2x_k + u_k$ déterminer la commande u qui stabilise x et minimise

$$\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T x_k + u_k^T R u_k]$$

Résolution pour $T_f \rightarrow \infty$.
$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

$$L = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

$P_{T_f} = 0$ pour $T_f \rightarrow \infty$	R=0.1	R=1	R=10	R=100
Gain	L=1.86	L=1.62	L=1.51	L=1.5
Valeur propre de la BF (i.e., eig(A-BL))	0.13	0.38	0.48	0.5
Sol P de ARED	P=1.37	P=4.23	P=31.3	P=301

On constate que plus le poids sur la commande est important plus le système bouclé est lent (la dynamique de BF s'écarte du centre du cercle unité). Cela est normal car on pénalise la commande, en d'autre terme on restreint son évolution. L'énergie dépensée par la commande coûte très cher.

- Critère

$$J(u_0, u_1, \dots, u_{T_f-1}) = \sum_{k=0}^{T_f-1} L(x_k, u_k, k) + L_{T_f}(x_{T_f}, T_f)$$

- Contrainte

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, k)$$

- Solution

D'après le principe de Bellman, ce problème se réduit à trouver une fonctionnelle $V(x(t), t)$ définie sur $[0, T_f]$ solution de

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &= \min_u \{L(x_t, u_t, t) + V(x(t+1), t+1)\} \\ &= \min_u \{L(x_t, u_t, t) + V(F(x_t, u_t, t), t+1)\} \\ &\quad \text{coût immédiat} + \text{coût optimisé} \end{aligned}$$

- u^* est la solution qui donne le min de la fonctionnelle $V(x(t),t)$

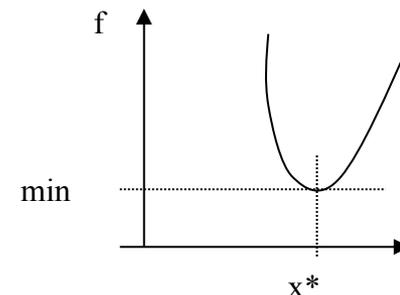
$$u^* = \arg \min_u \{L(x_t, u_t, t) + V(F(x_t, u_t, t), t+1)\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V(x(t), t)}{\partial u^2} > 0$$

- Rappel

$$x^* = \arg \min_x f$$

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} = 0 \quad \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} > 0$$



LQ à horizon fini : par res. de l'eq aux différences

- Pb : Déterminer une fonctionnelle $V(x(T_f-1), T_f-1)$ solution de

$$V(x(T_f-1), T_f-1) = L(x(T_f-1), u(T_f-1), T_f-1) + V(x(T_f), T_f)$$

- Résolution

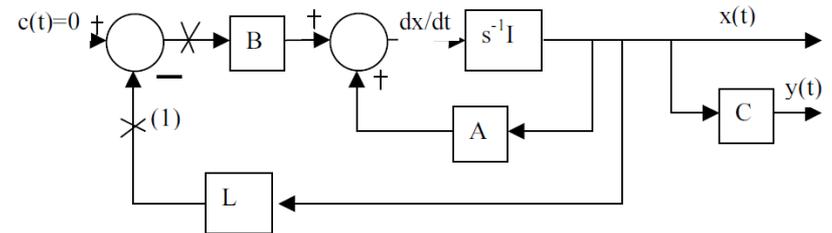
$$V(x(T_f-1), T_f-1) = \frac{1}{2} \left(x_{T_f-1}^T Q_{T_f-1} x_{T_f-1} + u_{T_f-1}^T R_{T_f-1} u_{T_f-1} \right) + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

avec $V(x(T_f-1), T_f-1) = \frac{1}{2} x_{T_f-1}^T P_{T_f-1} x_{T_f-1}$

Il reste à rendre la fonctionnelle $V(x(T_f-1), T_f-1)$ la plus petite possible

$$\left. \frac{\partial V(x(T_f-1), T_f-1)}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V(x(T_f-1), T_f-1)}{\partial u^2} > 0$$

Résultat fondamental : cas continu



- LQ: $J(u) = \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R_t u_t) dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$
 - contrainte $\dot{x} = Ax + Bu$
- Cas général
 - Minimiser $J(u) = \int_t^{T_f} L(x, u, t) dt + L_{T_f}(x_{T_f}, T_f)$
 - Sous la contrainte $\dot{x} = F(x, u, t)$

- D'après le principe de Bellman ce problème ramené au cas continu se réduit à trouver une fonctionnelle $V(x(t), t)$ solution de l'eq. HJB

$$-\dot{V}(x(t), t) = \min_u L(x, u, t) \Leftrightarrow -\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u L(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x} F(x, u, t)$$

- Solution

$$u^* = \arg \min_u \left\{ L(x_t, u_t, t) + \frac{\partial V}{\partial x} F(x, u, t) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{\partial \text{HJB}}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \text{HJB}}{\partial u^2} > 0$$

LQ à horizon fini par résolution de l'éq HJB

- Critère $J(u) = \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R_t u_t) dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$

- Contrainte $\dot{x} = Ax + Bu$

- Résolution $-\dot{V}(x(t), t) = \frac{1}{2} (x_t^T Q x_t + u_t^T R_t u_t)$

$$\Leftrightarrow V(x(t), t) = \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R_t u_t) dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

- avec $V(x(t), t) = \frac{1}{2} x_t^T P_t x_t$

- On détermine l'éq HJB

$$-\frac{1}{2} x_t^T \dot{P}_t x_t = \frac{1}{2} \dot{x}_t^T P_t x_t + \frac{1}{2} x_t^T P_t \dot{x}_t + \frac{1}{2} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) \Leftrightarrow HJB$$

Où
$$\left. \frac{\partial HJB}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 HJB}{\partial u^2} > 0$$

- On obtient $u_t^* = -R_t^{-1} B^T P_t x_t$

$$\frac{\partial^2 HJB}{\partial u^2} = R_t > 0$$

$$-\dot{P}_t = Q_t + A^T P_t + P_t A - P_t B R_t^{-1} B^T P_t$$

$$P_{T_f} = Q_{T_f}$$

LQ à horizon infini : cas continu

- Critère

$$\min_u J(u) = J(x(\infty), \infty) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) dt$$

- Contrainte

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Solution

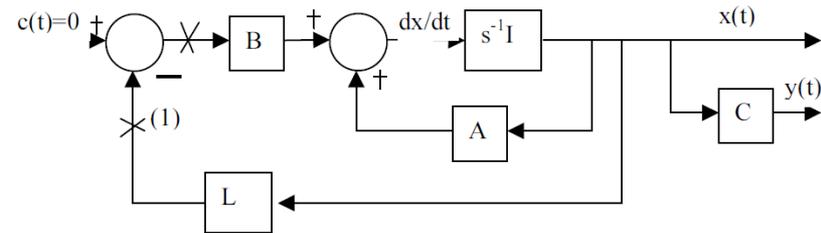


Schéma général de la commande LQ

$$u_t^* = -R^{-1} B^T P x_t$$

$$0 = Q + A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P$$

- Système bouclé $\dot{\mathbf{x}}_t = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}_t)\mathbf{x}_t$
 - Où la commande est donnée par $\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{L}_t\mathbf{x}_t$
 - avec $\mathbf{L}_t = \mathbf{R}_t^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$
 - est stable au sens de Lyapunov ssi
il existe une fonction de Lyapunov candidate > 0
dont sa dérivée le long des trajectoires non nulles de (1) est < 0
 - Preuve $V(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_t^T \mathbf{P}_t \mathbf{x}_t > 0$
 - $\dot{V}(\mathbf{x}_t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_t^T \mathbf{Q}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^T \mathbf{R}_t \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_t^T (\mathbf{Q}_t + \mathbf{L}_t^T \mathbf{R}_t \mathbf{L}_t) \mathbf{x}_t > 0$

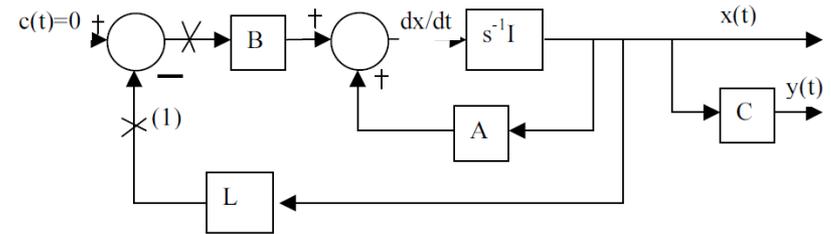
Propriétés de robustesse d'une commande LQ

- Le transfert de boucle s'écrit

$$L_c(s) = L(sI - A)^{-1} B$$

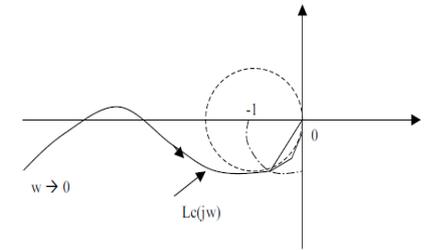
- avec $L = R^{-1} B^T P$

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$



On pose $F_c(s) = I + L_c(s) = S_u^{-1}$
 $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$

$$L_c(s) = L(sI - A)^{-1} B$$



On montre après quelques manipulations algébriques sur l'EAR que

$$|F_c(jw)| \geq 1 \Leftrightarrow |S_u^{-1}(jw)| \geq 1 \Leftrightarrow |1 + L_c(jw)| \geq 1 \Leftrightarrow |S_u(jw)| \leq 1$$

On constate que le lieu de Nyquist du transfert de boucle $L_c(jw)$ reste toujours à l'extérieur du cercle unité centré en -1 (voir figure 1.7). Il en résulte les propriétés de robustesse suivantes

- marge de module ≥ 1
- marge de gain ∞
- marge de phase $\geq 60^\circ$

Application: propriétés de robustesse

Exemple 1 *On considère le système continu*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ y = x \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}^1$ et le critère J

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^2 + Ru^2) dt$$

1. Déterminer la commande u qui minimise le critère J sous la contrainte du système (1.6).
2. Donner le transfert de boucle, pour $a = -1$ et $R = \frac{1}{3}$, tracer le nyquist associé et la fonction de sensibilité S_u .

Solution

$$ARE \quad : \quad P^2 - 2aRP - R = 0$$

$$P^+ = aR + \sqrt{(aR)^2 + R}$$

$$u = - \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

$$BF \quad : \quad \dot{x} = - \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

On obtient la commande optimale suivante

$$u = - \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{R}} \right) x$$

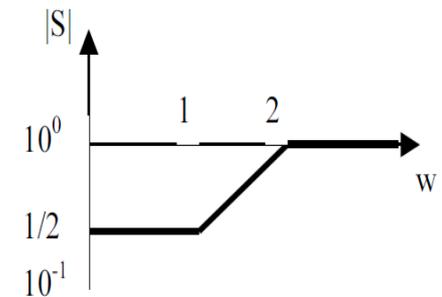
pour $R \rightarrow \infty$ la boucle fermée présente un mode $s = -|a|$, donc si le système (1.6) est instable $\Re(a) \geq 0$ on obtient une commande $u = -(a + |a|)x = -2|a|x$ et pour un mode stable $\Re(a) < 0$ on obtient une commande nulle.

2. Donner le transfert de boucle, pour $a = -1$ et $R = \frac{1}{3}$, tracer le nyquist associé et la fonction de sensibilité S_u .

Solution

$$L_c(s) = L(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s + 1}$$

$$S_u(s) = \frac{1}{2} \frac{s + 1}{\frac{s}{2} + 1}$$



fonction de sensibilité S

Application: propriétés de robustesse

Le nyquist du transfert de boucle $L_c(jw)$ donne

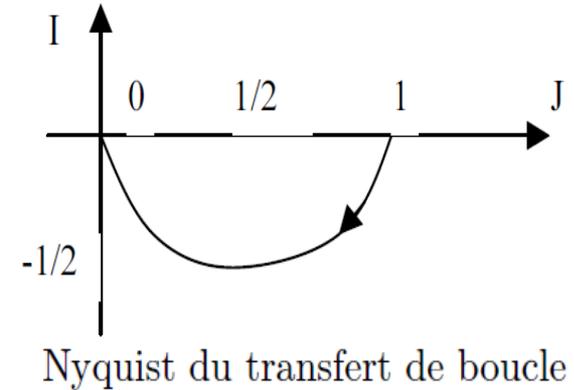
$$L_c(jw) = \frac{1}{jw + 1} = \frac{1}{1 + w^2} - \frac{jw}{1 + w^2}$$

$$\Re = \frac{1}{1 + w^2} > 0, \quad I = -\frac{w}{1 + w^2} < 0, \quad \frac{J}{\Re} = -w$$

$$\Rightarrow \Re = \frac{1}{1 + \left(\frac{J}{\Re}\right)^2} \Leftrightarrow \Re^2 + J^2 - \Re = 0 \Leftrightarrow \left(\Re - \frac{1}{2}\right)^2 + J^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

soit un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. On obtient dès lors les marges de robustesse suivante (voir figure 1.8)

marge de module 1
marge de gain ∞
marge de phase 90°



- On définit l'Hamiltonien

$$H(\lambda, x, u) = -\frac{1}{2} \left(x^T Q x + u^T R u \right) + \lambda^T (A x + B u)$$

$$\text{– Rq: } J(u) = \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f} + \int_0^{T_f} \underbrace{-H(\lambda, x, u) + \lambda^T (A x + B u)}_{\frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u)} dt$$

- Cas général

$$\text{– Continu } H(x, u, \lambda, t) = -L(x, u, t) + \lambda^T F(x, u, t)$$

$$\text{avec } \dot{x} = F(x, u, k)$$

$$\text{– Discret } H_{k+1} = -L(x, u, k) + \lambda_{k+1}^T F(x, u, k)$$

$$\text{avec } x_{k+1} = F(x, u, k)$$

Équations canonique de Hamilton

- Conditions au 1er ordre : $\dot{x} = \frac{\delta H}{\delta \lambda}$ $x_{k+1} = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta \lambda_{k+1}}$
 $\dot{\lambda} = -\frac{\delta H}{\delta x}$ $\lambda_k = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta x_k}$

Avec la condition terminale

$$\lambda_{T_f}^T = -\frac{\partial \text{Coût final}}{\partial x} = -x_{T_f}^T P_{T_f}$$

+conditions

$$\left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0 \qquad \left. \frac{\delta H_{k+1}}{\delta u_k} \right|_{u_k=u_k^*} = 0$$

$$\frac{\delta^2 H}{\delta u^2} < 0 \qquad \frac{\delta^2 H_{k+1}}{\delta u_k^2} < 0$$

- Exercice 1: On considère le système

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

Partant de $x_1 = 0$ à $t = 0$, on souhaite atteindre l'état $x_1 = 2$ à $t = 1$. Déterminer la commande optimale u qui minimise

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (3x_1^2 + u^2) dt$$

sous la contrainte du système et des conditions aux limites énoncées.

- Aide : on pose l'Hamiltonien

$$H(\lambda, x, u) = -\frac{1}{2} \left(x^T Q x + u^T R u \right) + \lambda^T (A x + B u)$$

- Avec les conditions

$$\dot{\lambda} = -\frac{\delta H}{\delta x} \quad \left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \frac{\delta^2 H}{\delta u^2} < 0$$

Exercice 1: Maximisation de l'Hamiltonien

- Solution de l'exercice 1

On pose

$$H = -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}u^2 + \lambda_x (-x_1 + u)$$

Il n'existe pas de contrainte explicite sur u , donc pour maximiser H il suffit d'appliquer les conditions aux premier et second ordres et d'annuler la dérivée de l'Hamiltonien par rapport à u .

$$\frac{\delta H}{\delta u} = -u + \lambda_x$$

$$\frac{\delta^2 H}{\delta u^2} = -1$$

donc $u^* = \lambda_x$ maximise H et le système devient

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \lambda_x$$

où λ_x vérifie

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\delta H}{\delta x_1} = \lambda_x + 3x_1$$

Conclusion $\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 + \dot{\lambda}_x = -\dot{x}_1 + \lambda_x + 3x_1 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 + 3x_1 = 4x_1$ et $\lambda_x = \dot{x}_1 + x_1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} x_1^* &= A \sinh(2t + \alpha) \\ \lambda_x &= u^* = A(2 \cosh(2t + \alpha) + \sinh(2t + \alpha)) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites donnent $\alpha = 0$, $A = \frac{2}{\sinh(2)}$, soit une commande

$$u^* = \frac{2}{\sinh(2)} (2 \cosh(2t + \alpha) + \sinh(2t + \alpha))$$

Exercice 2: Véhicule à essence

Un véhicule à essence est modélisé par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t) \\ \dot{S}(t) &= -\frac{1}{2}u^2(t)\end{aligned}$$

avec pour conditions initiales $x(0) = 0$, et $S(0) = 1$. La commande u caractérise une vitesse, x la distance parcourue et S le niveau du réservoir de carburant. La deuxième équation modélise le fait que la consommation augmente en raison quadratique de la vitesse (intuitivement cette hypothèse est valide). Sur un horizon $T=1$, on souhaite parcourir la distance $x(T)$ la plus grande possible.

1. Calculer la commande optimale $u^*(t)$ maximisant la distance parcourue en utilisant la totalité du carburant disponible.
2. En déduire la distance maximale parcourue

- Rappel : Résolution par maximisation de l'Hamiltonien : H
 - Cas continu $H(x, u, \lambda, t) = -L(x, u, t) + \lambda^T F(x, u, t)$
avec $\dot{x} = F(x, u, k)$

$$\lambda_{T_f}^T = -\frac{\partial \text{Coût final}}{\partial x(T_f)} = -x_{T_f}^T P_{T_f} \quad \left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0 \quad \frac{\delta^2 H}{\delta u^2} < 0$$

- Application : Véhicule à essence $H(x, u, \lambda, t) = 0 + (\lambda_x \quad \lambda_s) \begin{pmatrix} u \\ -\frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix} = \lambda_x u - \frac{\lambda_s}{2} u^2$
avec $\text{Coût final} = -x(T) + \mu S(T) = \text{Cte}$

On désire maximiser $x(T)$ et on souhaite $S(T) = 0$ pour dépenser tout le carburant. μ est un multiplicateur constant de Lagrange utilisé pour dualiser la contrainte $S(T) = 0$.

- Le PMP affirme que si u est une solution optimale, alors :

- Les variables adjointes $(\lambda_x \quad \lambda_s)$ sont solutions des équations adjointes

$$\dot{\lambda} = -\frac{\delta H}{\delta x} \Leftrightarrow \left\{ \dot{\lambda}_x = -\frac{\delta H}{\delta x}; \quad \dot{\lambda}_s = -\frac{\delta H}{\delta s} \right\} \Leftrightarrow \{ \dot{\lambda}_x = 0 \Rightarrow \lambda_x = Cte; \quad \dot{\lambda}_s = 0 \Rightarrow \lambda_s = Cte \}$$

$$\lambda_{T_f}^T = -\frac{\partial \text{Coût final}}{\partial \underline{x}(T_f)} = -\frac{\partial (-x(T_f) + \mu S(T_f))}{\partial \underline{x}(T_f)} \Leftrightarrow \{ \lambda_x(T_f) = 1 \forall t \in [0, T_f]; \quad \lambda_s(T_f) = -\mu \forall t \in [0, T_f] \}$$

$$\lambda_{T_f}^T = (\lambda_x(T_f) \quad \lambda_s(T_f))$$

$$\underline{x}^T = (x \quad s)$$

- $u(t)$ réalise le maximum instantané de $H = \lambda_x u - \frac{\lambda_s}{2} u^2$

$$\left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0 \Leftrightarrow \lambda_x(t) - \lambda_s u(t) = 0 \Leftrightarrow u(t) = \frac{\lambda_x(t)}{\lambda_s(t)} = -\frac{1}{\mu}$$

- Il reste à déterminer le paramètre de Lagrange μ

Sachant $\dot{x}(t) = u(t)$ on obtient $\dot{s}(t) = -\frac{1}{2\mu^2} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2\mu^2}t + s(0) = -\frac{1}{2\mu^2}t + 1$

$$\dot{s}(t) = -\frac{1}{2}u^2(t)$$

$$s(0) = 1$$

$$s(T) = 0$$

or $s(T=1) = -\frac{1}{2\mu^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{2}$

Conclusion de l'exercice 2

- Seul le choix

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

a un sens physique car il correspond à une vitesse u positive

$$u(t) = -\frac{1}{\mu} = \sqrt{2} = 1.41$$

On note que cette vitesse est constante.

La distance maximale parcourue est

$$\dot{x}(t) = u(t) = \sqrt{2} \Rightarrow x(t) = \sqrt{2}t - x(0) \Rightarrow x(T) = \sqrt{2} = 1.41$$

Exercice 3: Gestion de stock

Un fermier produit un certain type de céréale à reproduction rapide. Après chaque récolte, il peut stocker une partie de sa production et réutiliser le reste comme engrais pour la nouvelle récolte.

Partant de l'instant $t = 0$, il souhaite maximiser son stock à une date donnée $T = 10$, pour le vendre en totalité à la date T .

On note à l'instant t

$x_1(t)$ le niveau de production

$u(t)$ la part de production servant d'engrais pour la production suivante

$v(t)$ la part de production stockée

avec $x_1(0) = 100$ le stock initial acheté.

On propose le modèle suivant

$$\dot{x}_1 = u$$

sous la contrainte algébrique $x_1(t) = u(t) + v(t)$.

Questions :

1. A l'aide de la variable $x_2(t)$, quantité totale stockée à l'instant t , poser et résoudre un problème de commande optimale.

Exercice 3: éléments de réponses

- Exercice : Gestion de stock

1. Le problème est un problème de commande optimale à temps minimal, cela consiste à maximiser $J = x_2(T) - x_2(0) = x_2(10) - x_2(0)$ sous les contraintes du modèle

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= v \\ x_1(t) &= u(t) + v(t)\end{aligned}$$

avec $x_1(0) = 100$ et $x_2(0) = 0$. Le modèle $\dot{x}_2 = v$ s'explique aisément puisque v représente la part de production stockée, en d'autre terme, à l'instant k discret on dispose d'un stock $x_2(k)$, au pas suivant $x_2(k+1) = x_2(k) + v(k)$ où $v(k)$ représente la nouvelle part à stocker soit $\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{k+1 - k} = v(k) \Leftrightarrow \dot{x}_2 = v$ (en représentation continu). De plus, on nécessairement

$$\begin{aligned}x_1(t) &\geq u(t) \geq 0 \\ x_1(t) &\geq v(t) \geq 0 \\ x_i(t) &\geq 0, \quad i = 1, 2\end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation de répartition $x_1(t) = u(t) + v(t)$, le problème peut se réécrire sous la forme suivante

$$\min -x_2(T) \text{ sous } \begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1(t) - u(t) \\ 0 \leq u(t) \leq x_1(t) \end{cases}$$

le seul coût à minimiser est un coût final $C_f = -x_2(T)$. Il reste à appliquer le PMP.

Exercice 3: éléments de réponses

- Application du principe du maximum de Pontryaguine

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) = -L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda^T F(\mathbf{x}, u, t)$$

$$H(x, u, \lambda, t) = 0 + \begin{pmatrix} \lambda_{x_1} & \lambda_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x_1(t) - u(t) \end{pmatrix}$$

Les variables adjointes $(\lambda_{x_1} \quad \lambda_{x_2})$ sont solutions des équations adjointes

$$\dot{\lambda} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}} \Leftrightarrow \left\{ \dot{\lambda}_{x_1} = -\frac{\delta H}{\delta x_1}; \quad \dot{\lambda}_{x_2} = -\frac{\delta H}{\delta x_2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \dot{\lambda}_{x_1} = -\lambda_{x_2} \quad \dot{\lambda}_{x_2} = 0 \Rightarrow \lambda_{x_2} = Cte \right\}$$

$$\lambda_{T_f}^T = -\frac{\partial \text{Coût final}}{\partial \underline{x}(T_f)} = -\frac{\partial (-x_2(T_f))}{\partial \underline{x}(T_f)} \Leftrightarrow \left\{ \lambda_{x_1}(T_f) = 0; \quad \lambda_{x_2}(T_f) = 1 \forall t \in [0, T_f] \right\}$$

$$\lambda_{T_f}^T = (\lambda_{x_1}(T_f) \quad \lambda_{x_2}(T_f))$$

$$\underline{x}^T = (x_1 \quad x_2)$$

Exercice 3: éléments de réponses

- On en déduit que $\dot{\lambda}_{x_1} = -1$ $\lambda_{x_2} = 1$
 - Soit $\lambda_{x_1} = -t + \lambda_{x_1}(0) = -t + T_f = -t + 10$
 $\lambda_{x_2} = 1$
 - D'où

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda_{x_1} u + \lambda_{x_2} (x_1(t) - u(t)) = (-t + 10)u(t) + x_1(t) - u(t)$$

$$H = x_1(t) + (9 - t)u(t)$$
- Le principe du maximum de Pontryaguine dit que cette fonction doit être maximisée à chaque instant $t \in [0, T_f = 10]$
 - Tant que $9 - t > 0$, la maximisation de H est obtenue pour $u(t) = x_1(t)$, on réinvestit tout dans la production sous forme d'engrais
 - Tant que $t \in [9, 10]$, la maximisation de H est obtenue pour $u(t) = 0$, c'est-à-dire on stocke toute la production de la dernière période.
 - A partir de u on en déduit l'évolution du stock pour $t \in [0, 10]$, ...

- On considère le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 $y(t) = Cx(t)$
 - Avec $\varepsilon(t) = y_{ref}(t) - y(t)$

Première partie :

- La référence $y_{ref}(t)$ est constante

Seconde partie :

- La référence $y_{ref}(t)$ est variable et correspond par exemple à une trajectoire prédéfinie à suivre

Première partie : référence constante

- Il suffit d'appliquer la commande optimale

$$u(t) = -Lx(t) + hy_{ref}(t)$$

- Où L est le gain optimal : $L = R^{-1}B^T P$
- et P la solution positive de l'ARE $Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = 0$
- Le paramètre h est un pré filtre égal à l'inverse du gain statique de la BF optimisée, soit :

$$h = -\left(C(A - BL)^{-1}B\right)^{-1}$$

Deuxième partie : référence variable

- Nous nous intéressons au problème de poursuite suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (\epsilon_t^T Q_t \epsilon_t + u_t^T R_t u_t) dt + \frac{1}{2} \epsilon_{T_f}^T P_{T_f} \epsilon_{T_f} \quad \epsilon = y_{ref} - y$$

- Ce problème est équivalent au sens de Bellman à l'équation suivante :

$$-\dot{V}(\epsilon(t), t) = \frac{1}{2} (\epsilon_t^T Q_t \epsilon_t + u_t^T R_t u_t)$$

$$-\dot{V}(x(t), t) = \underbrace{\frac{1}{2} x_t^T C^T Q C x_t + \frac{1}{2} u_t^T R u_t}_{\text{coût état + commande}} - \underbrace{y_{ref}^T Q C x_t}_{\text{coût de suivie}} + \underbrace{\frac{1}{2} y_{ref}^T Q y_{ref}}_{\text{coût final}}$$

- Il faut donc trouver une fonctionnelle V solution de l'équation précédente. Cette fonctionnelle est de la forme suivante :

$$V(x(t), t) = \frac{1}{2} x_t^T P_t x_t + g_t^T x + h_t$$

- Que l'on dérive le long des trajectoires du process $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 $y(t) = Cx(t)$

Deuxième partie : suivi de trajectoire (suite)

- D'après l'équation de HJB

$$-\dot{V}(x(t), t) = \underbrace{\frac{1}{2}x_t^T C^T Q C x_t + \frac{1}{2}u_t^T R u_t}_{\text{coût état + commande}} - \underbrace{y_{ref}^T Q C x_t}_{\text{coût de suivie}} + \underbrace{\frac{1}{2}y_{ref}^T Q y_{ref}}_{\text{coût final}}$$

- Et de la fonctionnelle candidate $V(x(t), t) = \frac{1}{2}x_t^T P_t x_t + g_t^T x + h_t$
- On trouve après quelques manipulations

$$u_t^* = -R^{-1}B^T P_t x_t - R^{-1}B^T g_t$$

- Le système d'équations :

$$\begin{cases} -\dot{P}_t = A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t + C^T Q C ; \\ \text{avec } P_{T_f} = C^T Q_{T_f} C \\ -\dot{g}_t = (A^T - L_t^T B^T) g_t - C^T Q y_{ref} ; \\ \text{avec } g_{T_f} = -C^T Q_{T_f} y_{ref}(T_f) \\ \dot{h} = g_t^T B R^{-1} B^T g_t - y_{ref}^T Q y_{ref} \end{cases}$$

On considère le système suivant : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2}{p+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = 2x \end{cases}$

où le critère de performance vise à effectuer un compromis entre l'écart de régulation et le coût de commande :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left((y(\tau) - y_{ref})^2 + \alpha^2 u^2(\tau) \right) d\tau$$

y_{ref} une consigne constante et α un paramètre à régler.

Solution

$$\begin{cases} -\dot{P}_t = A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t + C^T Q C = 0 \\ -\dot{g}_t = (A^T - L_t^T B^T) g_t - C^T Q y_{ref} = 0 \\ \dot{h} = g_t^T B R^{-1} B^T g_t - y_{ref}^T Q y_{ref} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha^{-2} P^2 + 4P - 1 \Leftrightarrow P^2 + 4\alpha^2 P - \alpha^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (P + 2\alpha^2)^2 - 4\alpha^4 - \alpha^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (P + 2\alpha^2)^2 - \alpha^2(4\alpha^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (P + 2\alpha^2 - \sqrt{\alpha^2(4\alpha^2 + 1)}) (P + 2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2(4\alpha^2 + 1)}) = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$P = -2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2(4\alpha^2 + 1)}$$

$$g = (A^T - L_t^T B^T)^{-1} C^T Q y_{ref}$$

$$y_{ref}^T Q y_{ref} = g_t^T B R^{-1} B^T g_t \Leftrightarrow y_{ref}^2 = \alpha^{-2} g^2$$

$$u_t^* = -Lx_t - \alpha^{-2} g$$

$$u_t^* = -Lx_t - \frac{y_{ref}}{(A^T - L_t^T B^T)^{-1} C^T Q} = -Lx_t + h y_{ref}$$

$$L = R^{-1} B^T P_t = R^{-1} B^T \left(-2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2(4\alpha^2 + 1)} \right) = -2 + \alpha^{-1} \sqrt{4\alpha^2 + 1}$$

$$h = -(A^T - L_t^T B^T)$$

- Un système est complètement observable si à partir d'un état quelconque pris à l'instant t on sait déterminer son évolution jusqu'à l'état initial.
- On propose la structure de l'observateur Identité

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) ; \hat{y} = C\hat{x}$$

- Objectif, trouver x tel que :

$$\forall x(t_0), \forall u(t), \text{ pour } t \geq t_0 \begin{cases} \hat{x}(t_0) = x(t_0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) \\ \hat{x}(t_0) \neq x(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Approche selon le principe de dualité

- Analyse de convergence de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}(t) = (A - GC) e(t)$$

- Sachant que les valeurs propres de $A-GC$ sont également les valeurs propres de $A^T-C^T G^T$
- Le problème d'estimation est par dualité équivalent à un problème de commande du système fictif suivant :

$$\dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T h(t)$$

- Avec $h^* = -G^T z$
- Cette commande optimale assure la stabilité de $A^T-C^T G^T$ et donc de $A-GC$ et donc celle de l'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e}(t) = (A - GC) e(t)$$

Approche selon le principe de dualité

- On s'ait finalement ramené à un problème de commande optimale identique à la première partie du cours.
- En conclusion, il suffit d'appliquer le principe de dualité et remplacer les matrices par les relations suivantes :

$$A \rightarrow A^T$$

$$B \rightarrow C^T$$

$$L \rightarrow G^T$$

$$-\dot{P} \rightarrow \dot{M}$$

$$M = M^T > 0$$

- Rappel de la structure de l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) ; \hat{y} = C\hat{x}$$

- Critère

$$\min_w J(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (z^T Q z + h^T R h) dt$$

- Système fictif

$$MA^T + AM - MC^T R^{-1} CM + Q = 0$$

$$G = MC^T R^{-1}$$

$$\dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T h(t)$$

Synthèse d'un observateur selon le principe d'optimalité de Bellman

- L'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) ; \hat{y} = C\hat{x}$$

- Est un observateur à gain optimal au sens où son gain est solution du problème d'optimalité

$$\begin{aligned} V(t, e(t)) &= \min_w J(w) \\ &= \underbrace{\int_{T_0}^t \left((y - \hat{y})^T R^{-1} (y - \hat{y}) + (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu)^T Q^{-1} (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu) \right) d\tau}_{\text{Coût immédiat} + \text{coût intermédiaire}} \\ &\quad + \underbrace{(\bar{x}_{t_0} - \hat{x}_{t_0})^T S^{-1} (\bar{x}_{t_0} - \hat{x}_{t_0})}_{\text{coût initial}} \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème de commande optimale avec un état initial imposé. On peut se ramener à un problème de commande optimale classique i.e., à état final imposé. Pour cela on pose le changement de coordonnées temporelles $t = -t'$.

Résolution par minimisation du critère

- On propose d'écrire l'observateur sous la forme
 - où $w = G(y - \hat{y})$
 - L'erreur d'estimation d'état $e = x - \hat{x}$
s'écrit alors sous la forme $\dot{e} = Ae - w$

Et le critère se réduit à la forme suivante

$$V(t, e(t)) = \int_{T_0}^t \left(e^T C^T R^{-1} C e + w^T Q^{-1} w \right) d\tau + e_{T_0}^T S^{-1} e_{T_0}$$

1^{ère} approche : Minimisation de l'HJB

- Solution optimale proposée : $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + M_t C^T R^{-1}(y - C\hat{x})$

- où
$$\frac{dM_t}{dt} = M_t A^T + A M_t + Q - M_t C^T R^{-1} C M_t$$

- avec $M(t = T_0) = S > 0$

- Preuve : On considère la fonctionnelle

$$V(t, e(t)) = \int_{T_0}^t \left(e^T C^T R^{-1} C e + w^T Q^{-1} w \right) d\tau + e_{T_0}^T S^{-1} e_{T_0}$$

- On cherche M_t telle que $V(t, e(t)) = e_t^T M_t^{-1} e_t$

avec



1^{ère} approche : Minimisation de l'HJB

- On se ramène à un problème de commande optimale de t à T_0 + coût final, en posant le changement de variable $t = -t'$
- Le critère se réécrit sous la forme classique

$$\begin{aligned} V(-t', e(-t')) &= \int_{-t'}^{-T_0} (e^T C^T R^{-1} C e + w^T Q^{-1} w) dt' + e_{-T_0}^T S^{-1} e_{-T_0} \\ &= +e_{-t'}^T M_{-t'}^{-1} e_{-t'} \end{aligned}$$

- Ou encore sous la forme équivalente de l'eq HJB

$$-\dot{V}(-t', e(-t')) = e^T C^T R^{-1} C e + w^T Q^{-1} w$$

– avec
$$-\frac{dV}{dt'} = -\frac{d(e_{-t'}^T M_{-t'}^{-1} e_{-t'})}{dt'}$$

1^{ère} approche : Minimisation de l'HJB

- Après quelques manipulations, nous obtenons

$$-\frac{d(e_{-t}^T M_{-t}^{-1} e_{-t})}{dt} = e^T C^T R^{-1} C e + w^T Q^{-1} w$$

$$\frac{e_{-t}^T M_{-t}^{-1} dM_{-t}^{-1} e_{-t}}{dt} = e^T \left(-A^T M_{-t}^{-1} - M_{-t}^{-1} A + C^T R^{-1} C \right) e + 2w^T M_{-t}^{-1} e + w^T Q^{-1} w$$

- Il reste à minimiser le coût précédent :

$$\left. \frac{d(2w^T M_{-t}^{-1} e + w^T Q^{-1} w)}{dw} \right|_{w=w^*} = 2M_{-t}^{-1} e + 2Q^{-1} w^* = 0$$

- Soit $w^* = -QM_{-t}^{-1} e$

- Que l'on réinjecte dans $\frac{e_{-t}^T M_{-t}^{-1} dM_{-t}^{-1} e_{-t}}{dt} = e^T \left(-A^T M_{-t}^{-1} - M_{-t}^{-1} A + C^T R^{-1} C \right) e + 2w^T M_{-t}^{-1} e + w^T Q^{-1} w$

1^{ère} approche : Minimisation de l'HJB

- On obtient après factorisation et identification terme à terme

$$\frac{dM_{-t'}}{dt} = -M_{-t'}A^T - AM_{-t'} - Q + M_{-t'}C^T R^{-1}CM_{-t'}$$

- Il reste à revenir à la variable temporel $t=-t'$ et l'on obtient la dare

$$\frac{dM_t}{dt} = M_tA^T + AM_t + Q - M_tC^T R^{-1}CM_t$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + M_tC^T R^{-1}(y - C\hat{x})$$

- Deuxième solution : par maximisation de l'Hamiltonien (voir poly)
- Troisième solution : par le calcul de variation (voir poly)

Observation : Cas stochastique

- Le processus aléatoire considéré est $\dot{x} = Ax + bu + w$
 $y = Cx + v$
- Où w et v sont des bruits blancs centrés, de matrice de covariance connue et non corrélés entre eux :

$$w \cong N(0, Q), v \cong N(0, R)$$

- Objectif : Déterminer un estimateur de x non biaisé et à variance minimale

- Horizon fini : on considère à nouveau le critère

$$\min_w J(w) = (x_{t_0} - \hat{x}_{t_0})^T S^{-1} (x_{t_0} - \hat{x}_{t_0}) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\begin{array}{c} (y - \hat{y})^T R^{-1} (y - \hat{y}) \\ + (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu)^T Q^{-1} (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu) \end{array} \right) d\tau$$

où $\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu = w$ et $y - \hat{y} = Ce$

- On obtient les mêmes résultats que précédemment avec l'interprétation fort intéressante que :

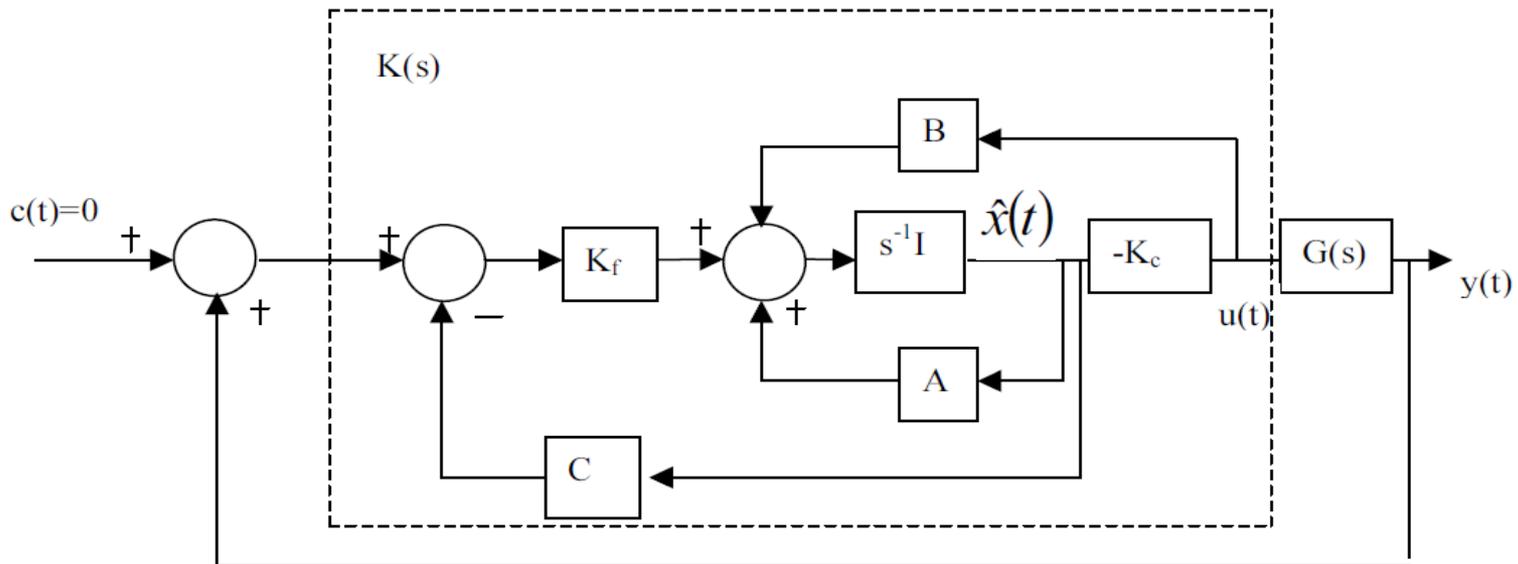
Pour une grande dispersion sur le processus w (i.e. variance des bruits de structure grande) correspond un crédit (coût) faible accordé à l'équation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ d'où un choix de Q^{-1} petit dans le critère déterministe.

Pour une petite dispersion sur les mesures y (i.e., variance des bruits de mesure faible) correspond un crédit fort accordé à l'équation de mesure $y = Cx$ et donc au terme de correction $G(y - C\hat{x})$ d'où un choix R^{-1} grand dans le critère déterministe et un gain G grand.

- Horizon infini

$$\min_w J(w) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \underbrace{\left((y - \hat{y})^T R^{-1} (y - \hat{y}) + (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu)^T Q^{-1} (\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu) \right)}_{\text{coût immédiat } t + \text{coût intermédiaire } t \text{ à } t_0} d\tau$$

- Structure de la commande LQG



- Selon le principe de séparation
 - On cherche le gain de Kalman K_f et le gain de Correction K_c

- On considère le modèle de synthèse

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Hw \\ y = Cx + v \\ z = Nx \end{cases}$$

où z désigne le vecteur à réguler, w et v représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance W et V .

$$\begin{aligned} E [w(t) w^T(t)] &= W\delta(t), & E [v(t) v^T(t)] &= V\delta(t), \\ E [w(t) v^T(t)] &= 0, & W = W^T \geq 0, & \quad V = V^T \geq 0 \end{aligned}$$

- Le problème revient à déterminer u fonction de l'estimé de x telle que :

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right]$$

où Q et R sont deux matrices de pondération avec $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$.

- Partie 1 : on recherche l'estime de x en appliquant les résultats du filtre de Wiener :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f (y - C\hat{x})$$

avec $K_f = P_f C^T V^{-1}$ où P_f obéit à l'équation de Riccati suivante

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + H W H^T = 0$$

avec $P_f = P_f^T > 0$.

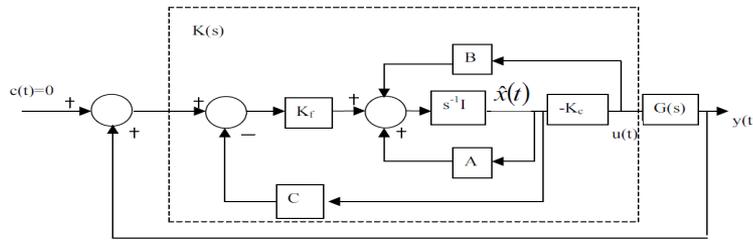
- Partie 2 : on recherche K_c en appliquant le principe de Bellman au critère

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right]$$

Et l'on déduit $u = -K_c \hat{x}$

$$K_c = R^{-1} B^T P_c$$

$$P_c A + A^T P_c - \tilde{P}_c B R^{-1} B^T \tilde{P}_c + N^T Q N = 0$$



Commande LQG

- La synthèse LQG exige donc la résolution des équations de Riccati duales et l'on peut facilement se ramener au schéma bloc usuel avec une gain dynamique $K(s)$ et le process $G(s)$
- Il suffit de repérer sur le schéma de synthèse l'entrée et la sortie du bloc $K(s)$ et de donner la représentation d'état associé

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - BK_c - K_f C) \hat{x} + K_f y \\ u &= -K_c \hat{x}\end{aligned}$$

- Soit $K(s) = -K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f$
- Il reste à étudier le transfert de boucle et faire tendre ce transfert au transfert sans l'observateur afin de conserver les propriétés de robustesse d'une commande LQ: il s'agit dès lors du principe de la commande LTR

- On considère le système stochastique

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u + w \\ y = x + v \end{cases}$$

- Où w et v sont des bruits blancs $w \cong N(0, 3)$ $v \cong N(0, 1)$
 - Pour la commande on considèrera un poids $R=3$ et $Q=1$
1. Déterminer la synthèse de commande LQG solution de problème
 2. Déterminer le transfert de boucle avec et sans observateur
 3. En déduire les fonctions de sensibilité
 4. Tracé le module des fonctions de sensibilité et du transfert de boucle avec et sans observateur
 5. Conclure

- Selon le principe de séparation : on synthétise premièrement l'observateur puis la commande ou inversement
- Observateur :

On détermine $K_f = P_f C^T V^{-1}$ où P_f est la solution positive de l'équation de Riccati

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + H W H^T = 0$$

$$\Leftrightarrow P_f^2 + 2P_f - 3 = 0$$

soit $K_f = P_f = 1$.

- Commande :

On détermine $K_c = R^{-1} B^T P_c$ où P_c est la solution positive de l'équation de Riccati

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0$$

$$\Leftrightarrow P_c^2 + \frac{2}{3} P_c - \frac{1}{3} = 0$$

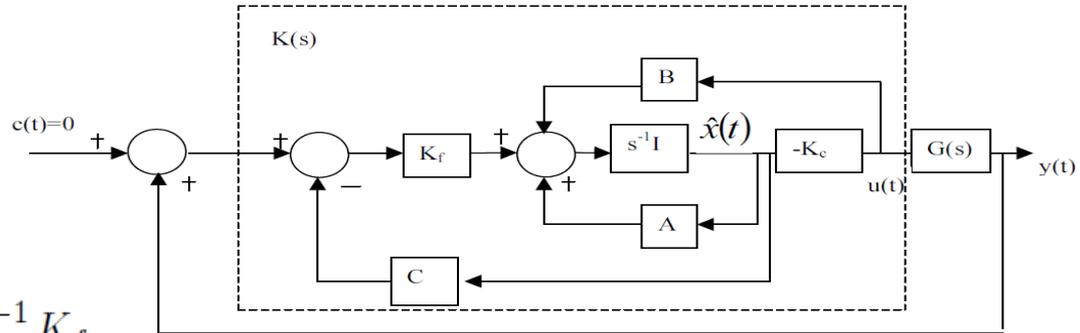
soit $K_c = 3P_c = 1$ et $P_c = \frac{1}{3}$.

- Sachant que

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK_c - K_f C) \hat{x} + K_f y$$

$$u = -K_c \hat{x}$$

$$K(s) = -K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f$$



- On en déduit le transfert de boucle

- avec observateur

$$L_{LQG}(s) = K(s) G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+3} \quad K(s) = \frac{1}{s+3}$$

- sans observateur

$$L_{LQ}(s) = K_c (sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s+1}$$

$$S + T = I$$

- Fonction de sensibilité avec observateur

$$S_{LQG} = \frac{1}{1+L_{LQG}(s)} = \frac{s^2+4s+3}{s^2+4s+4}$$

- Fonction de sensibilité sans observateur

$$S_{LQ} = \frac{1}{1+L_{LQ}(s)} = \frac{1}{2} \frac{s+1}{\frac{s}{2}+1}$$

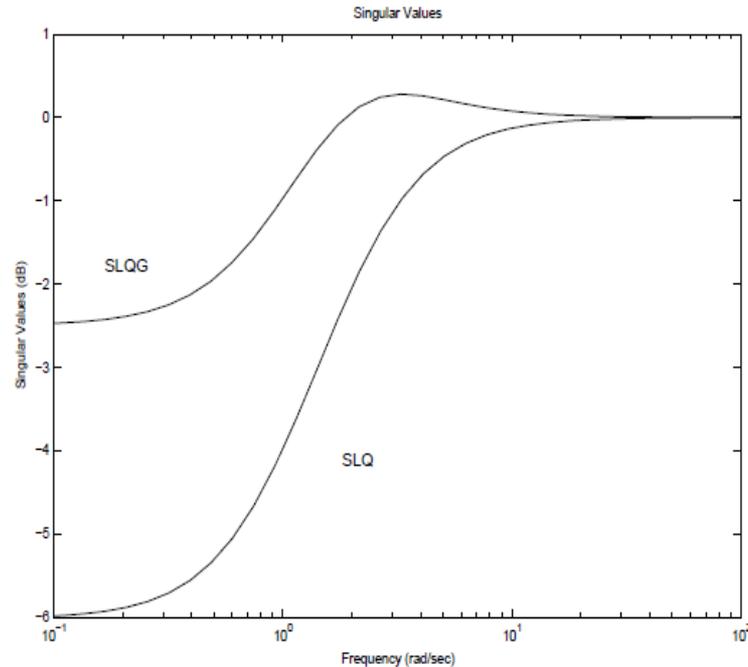
- Fonction de sensibilité complémentaire avec observateur

$$T_{LQG} = \frac{L_{LQG}(s)}{1+L_{LQG}(s)} = \frac{1}{s^2+4s+4}$$

- Fonction de sensibilité complémentaire sans observateur

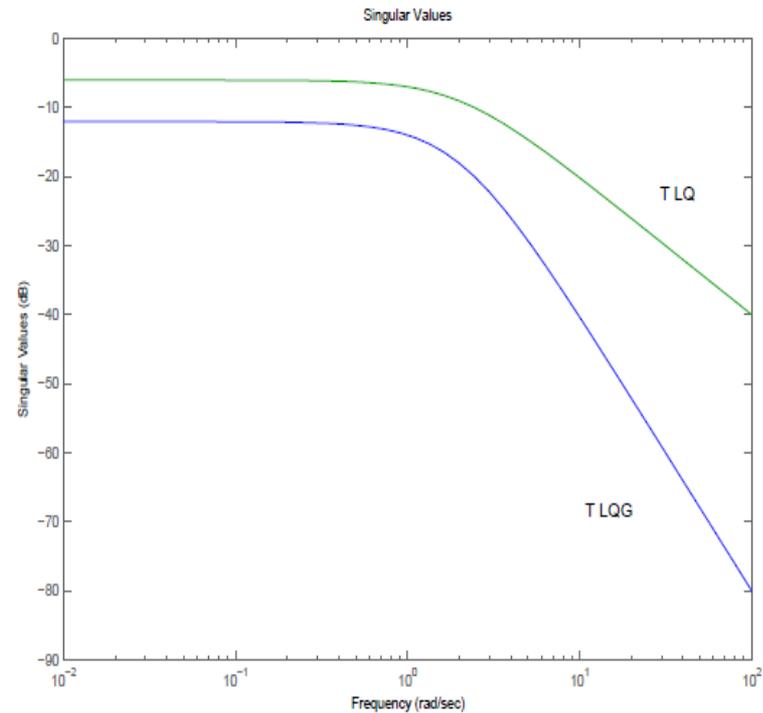
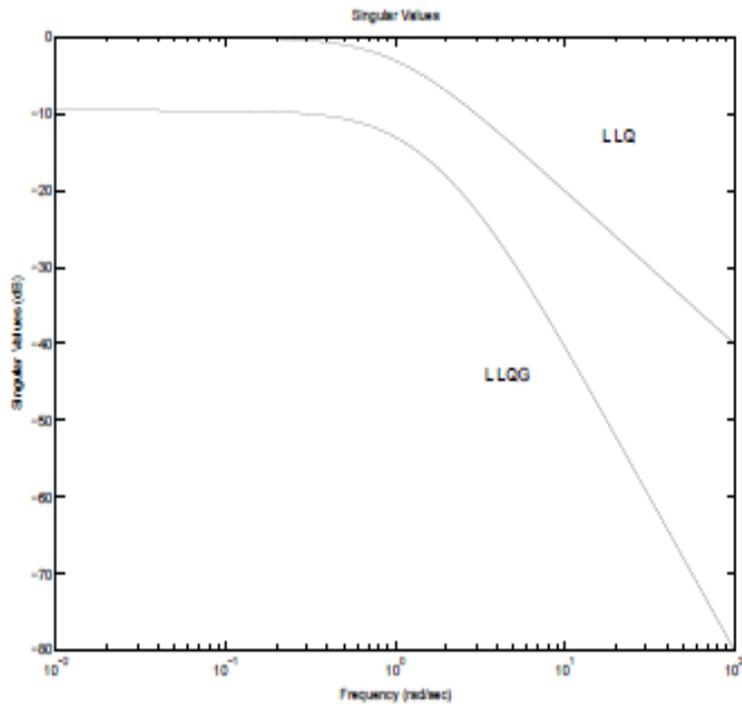
$$T_{LQ}(s) = \frac{L_{LQ}(s)}{1+L_{LQ}(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

- Fonctions de sensibilité



On constate que le compromis Performance / Robustesse de la commande LQG (avec observateur) est moins bon que celui de la commande LQ (sans observateur)

- Transferts de boucle / Fonctions de sensibilité complémentaire



- Le régulateur LQ et l'observateur LQ (Filtre de Kalman ou Wiener) étudiés séparément montrent une très bonne robustesse ($MG \infty$, $MP > 60^\circ$), cependant l'association des deux induit une perte de robustesse.
- Pour conserver les excellentes propriétés de robustesse de la synthèse LQ, il convient naturellement de faire tendre asymptotiquement le transfert de boucle avec observateur vers le transfert de boucle sans observateur.

$$L_{LQG}(s) = K(s)G(s) \longrightarrow L_{LQ}(s) = K_c(sI - A)^{-1}B$$

– Principe de base de la commande LTR

La modélisation de nature stochastique du système disparaît au profit d'une meilleure robustesse associée à des performances nominales imposées.

Recouvrement asymptotique à l'entrée

- Procédure :
 1. Synthèse du correcteur LQ par un choix approprié des poids Q et R pour un bon comportement en basse fréquence des valeurs singulières du transfert de boucle
 2. Synthèse LQ de l'observateur en fixant premièrement les poids W_0 et V_0 du filtre de Kalman et en augmentant graduellement le poids

$$W = W_0 + qBB^T$$

tel que le transfert de boucle $L_{LQG}(s)$ tend asymptotiquement vers le transfert de boucle $L_{LQ}(s)$.

Passage d'un régulateur/observateur LQ à une synthèse RST

- On considère le système (A,B,C) perturbé en sortie par une perturbation b constante.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k$$

- On propose d'ajouter un état z égal à l'intégrale de l'erreur de poursuite à asservir et un observateur identité de l'état x du système.

$$\dot{z}(t) = y(t) - y_{ref}(t) \qquad \hat{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G(y_k - C\hat{x}_k)$$

$$\Leftrightarrow z_{k+1} - z_k = y_k - y_{refk}$$

- Il convient alors de rechercher par synthèse LQ et selon le principe de séparation respectivement le gain augmenté L et le gain G de la commande et de l'observateur.

$$u_k = -L \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

- On obtient le système augmenté

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} y_{refk}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{ak+1} = A_a x_{ak} + B_a u_k + \dots \\ y_k = (C \ 0) x_{ak} \end{cases}$$

- où la fonction « dlqr » de Matlab donne directement L en minimisant le critère

$$J(u) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{T_f-1} (y_k^T y_k + u_k^T R_r u_k)$$

- Par dualité on obtient le gain de l'observateur LQ et on obtient au final le système augmenté

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BL_1 - GC & -BL_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_c \end{pmatrix}$$

$$u_k = - \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

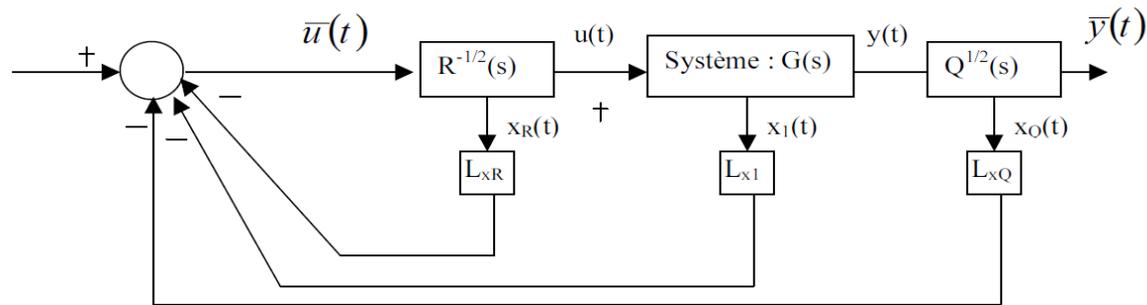
- Que l'on identifie à la synthèse de commande RST

$$u = \frac{T}{S}y_c - \frac{R}{S}(y + b)$$

- On obtient dès lors les polynômes inconnus T et S par le calcul du transfert u/y_c associé au système ci-dessus et le polynôme -R par le calcul du numérateur du transfert u/y .

Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Principe



- Modeler le transfert de boucle afin de satisfaire au mieux le compromis Performance/Robustesse.

- Solution

- Appliquer le principe du théorème de Parseval

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (y^T Q y + u^T R u) dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y_{(j\omega)}^* Q_{(j\omega)} y_{(j\omega)} + u_{(j\omega)}^* R_{(j\omega)} u_{(j\omega)} \right) d\omega$$

Commande LQ à pondérations fréquentielles

- On montre que le problème de synthèse LQ à pondération fréquentielle, peut se ramener à un problème de synthèse LQ temporel à pondération unitaire.
- Explication:

– Le critère $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y_{(jw)}^* Q_{(jw)} y_{(jw)} + u_{(jw)}^* Q_{(jw)} u_{(jw)} \right) dw$
peut se réécrire sous la forme

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y_{(jw)}^* Q_{(jw)}^{*1/2} Q_{(jw)}^{1/2} y_{(jw)} + u_{(jw)}^* R_{(jw)}^{*1/2} R_{(jw)}^{1/2} u_{(jw)} \right) dw$$

En posant $\bar{y} = Q_{(jw)}^{1/2} y_{(jw)}$ et $\bar{u} = R_{(jw)}^{1/2} u_{(jw)}$

on obtient le critère temporel à pondération unitaire suivant :

$$\longleftrightarrow \int_0^{\infty} \left(\bar{y}_{(t)}^T \bar{y}_{(t)} + \bar{u}_{(t)}^T \bar{u}_{(t)} \right) dt$$

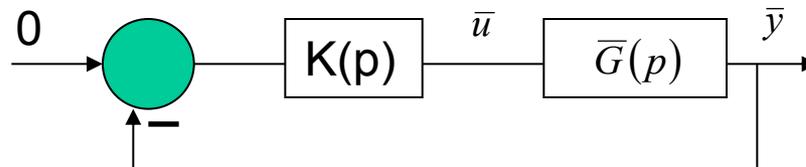
Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Conclusion

- La synthèse se réduit à un problème de commande LQ à pondération unitaire :

$$\int_0^{\infty} \left(\bar{y}_{(t)}^T \bar{y}_{(t)} + \bar{u}_{(t)}^T \bar{u}_{(t)} \right) dt$$

- sous la contrainte du système augmenté: $\bar{G}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{u}(p)} = R_{(p)}^{-1/2} G(p) Q_{(p)}^{1/2}$



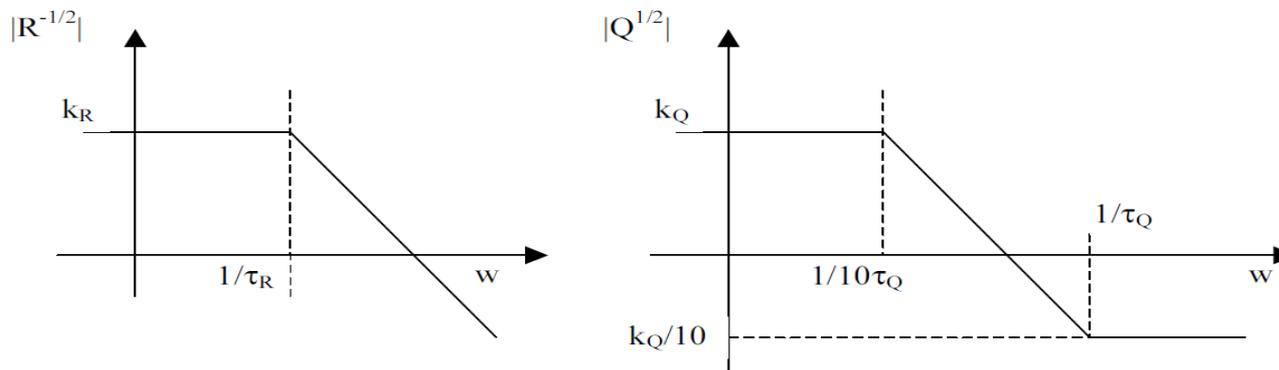
Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Le système augmenté $\bar{G}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{u}(p)} = R_{(p)}^{-1/2} G(p) Q_{(p)}^{1/2}$ peut être décomposé selon la représentation d'état suivante :

$$R_{(p)}^{-1/2} : \begin{cases} \dot{x}_R = A_2 x_R + B_2 \bar{u} \\ u = C_2 x_2 + D_2 \bar{u} \end{cases} \quad Q_{(p)}^{1/2} : \begin{cases} \dot{x}_Q = A_3 x_Q + B_3 y \\ \bar{y} = C_3 x_Q + D_3 y \end{cases}$$

$$G(p) : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

où les pré et post filtres $R^{-1/2}$ et $Q^{1/2}$ prennent généralement la forme suivante

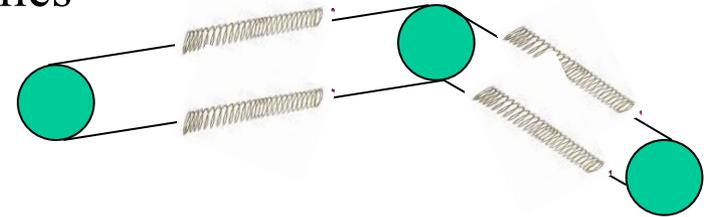


Commande LQ à pondérations fréquentielles

- Le pré filtre $R^{-1/2}(s)$ permet une décroissance plus rapide hors de la bande passante du système et donc une amélioration de la Robustesse.
- Le post filtre $Q^{1/2}(s)$ permet un accroissement de la pente dans la bande passante du système (augmentation du gain en basse fréquence) et donc une amélioration des performances.
- Exemple :
 - Poser $R^{-1/2}(s) = k/(p+1)$ et $Q^{1/2}(s) = (p+1)/p$ donne un transfert $\left(\frac{Q(p)}{R(p)}\right)^{1/2} = \frac{k}{p}$ intégrateur dont le paramètre k permet d'ajuster la bande passante et le compromis P/R.

Exemple : Etude de cas

- Transmission élastique composée de 3 poulies



- On considère un système de transmission élastique composé de 3 poulies reliées par deux courroies métalliques comportant chacune deux ressorts. Le problème de commande considéré est celui de l'asservissement en position de la troisième poulie à partir de la position de la première poulie.
- Pour la synthèse du régulateur, un modèle du système nominal à vide obtenu par identification est donné par le transfert suivant

$$G(s) = \frac{-3.434s^3 + 244.3s^2 - 1.021e^4s + 1.753e^5}{s^4 + 2.411s^3 + 1260s^2 + 1296s + 1.647e^5}$$

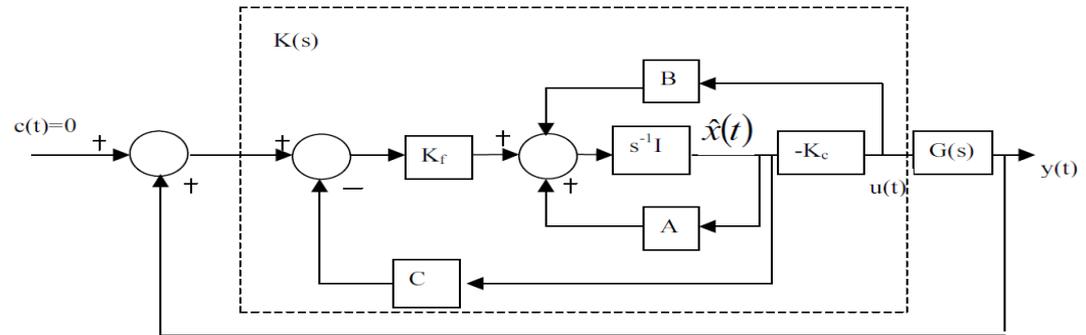
- Ce système est supposé soumis à une référence y_{ref} et à une perturbation en sortie dy . On propose de comparer les performances d'un régulateur LQG sans pondération fréquentielle et d'un régulateur LQG à pondération fréquentiel incluant un intégrateur dans la boucle.

- Régulateur LQG sans pondération fréquentielle, donc à pondérations fixes $Q_r = C^T C$ et $R_r = 1$ pour le régulateur optimal LQ et avec $Q_0 = B B^T$ et $R_0 = 1$
- Sous matlab :

```
%Procédé
G=tf([-3.434 244.3 -1.021e4 1.753e5], [1 2.411 1260 1296 1.647e5]);
[numG,denG]=tfdata(G,'v');
%representation d'état
[A,B,C,D]=tf2ss(numG,denG);
%regulateur 1 sans ponderation fréquentielle
[KcR1,Sc1,Ec1]=lqr(A,B,C'*C,1);
% Observateur 1 sans ponderation ponderation fréquentielle
[KoR1,So1,Eo1]=lqr(A',C',B*B',1);
KoR1=KoR1';
```

Régulateur LQG sans pondération fréquentielle

- Il reste à déduire $K(s)$



Où la fonction `reg` retourne directement $K(s)$

```
[Ar,Br,Cr,Dr] = reg(A,B,C,D,KcR1,KoR1);
[numK,denK]=ss2tf(Ar,Br,Cr,Dr);
K_ =tf(numK,denK);
```

On en déduit directement le tracé des fonctions usuelles

```
%sensibilité complémentaire T=I-S
T1=feedback(series(K_,G),1);
%sensibilité
S1=feedback(1,series(K_,G));
%controller*sensitivity
KS1=series(K_,S1);
%plant*sensitivity
GS1=series(G,S1);
```

Régulateur LQG avec pondération fréquentielle

- On se propose d'ajouter un effet intégrateur avec l'aide des pré et post filtres $R^{-1/2}(s)$ et $Q^{1/2}(s)$.

```
%Systeme augmenté
k=1; %permet de jouer sur la Bande Passante
GI=tf([k],[1 0]); %integrateur
Ga=series(G,GI); %système augmenté
[numG,denG]=tfdata(G,'v');
[A,B,C,D]=tf2ss(numG,denG);
[numGI,denGI]=tfdata(GI,'v');
% Representation d'état du sys augmenté Ga
[AGI,BGI,CGI,DGI]=tf2ss(numGI,denGI);
Aa=[A zeros(size(A,1),size(AGI,2));BGI*C AGI];
Ba=[B;zeros(size(AGI,1),1)];
Ca=[DGI*C CGI];
Da=0;
```

Régulateur LQG avec pondération fréquentielle

Il reste à déterminer par synthèse LQ ordinaire le gain du contrôleur et de l'observateur sur le système augmenté

```
[KcR2,Sc2,Ec2]=lqr(Aa,Ba,Ca'*Ca,1); %regulateur
[KoR2,So2,Eo2]=lqr(Aa',Ca',Ba*Ba',1); %Observateur
KoR2=KoR2';
```

On en déduit le régulateur $K(s)$

```
[Ar2,Br2,Cr2,Dr2] = reg(Aa,Ba,Ca,Da,KcR2,KoR2);
[numK3,denK3]=ss2tf(Ar2,Br2,Cr2,Dr2);
K3=tf(numK3,denK3);
```

Que l'on augmente de l'effet intégrateur k/p

```
K3a=series(K3,GI); %Correcteur augmenté de l'integrateur
```

Tracés des fonctions de sensibilités usuelles

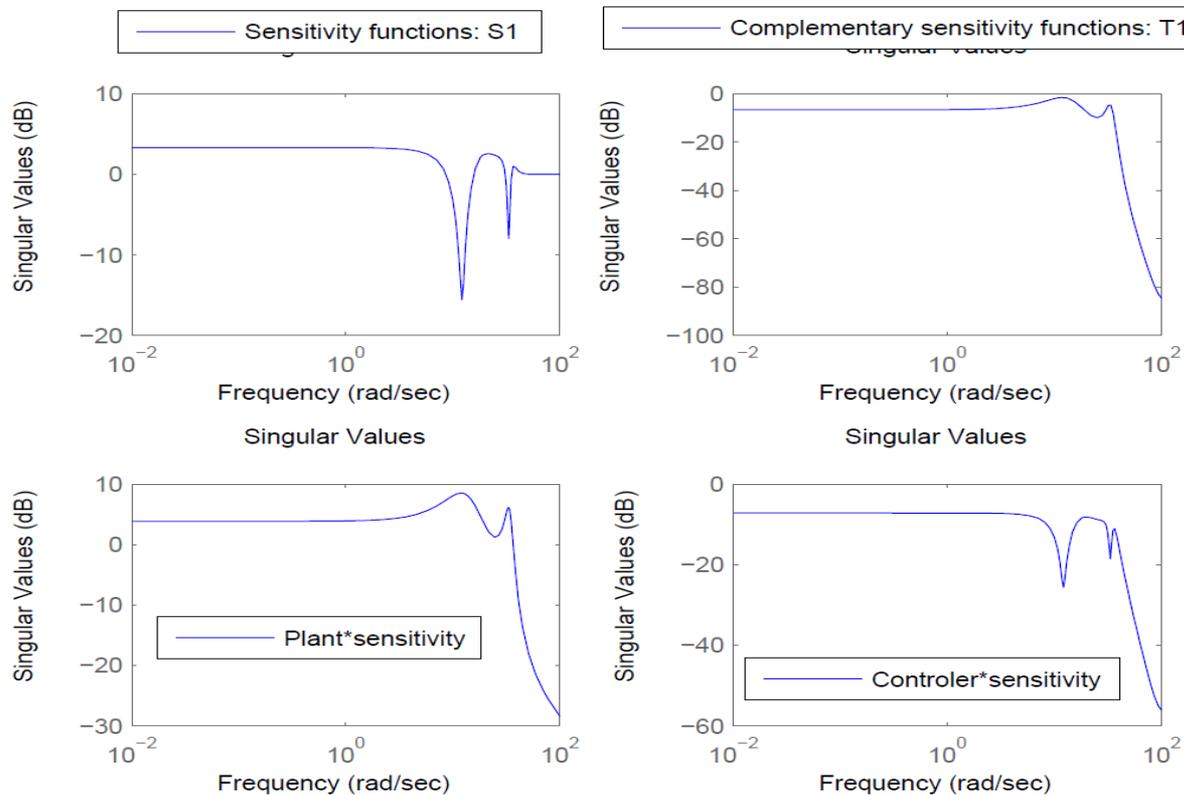
- Calcul de S et T

```
S3=feedback(1,series(K3a,G));
T3=feedback(series(K3a,G),1);
[MAG,PHASE] = bode(S3);
ModuleMargeS3=inv(max(MAG))
```

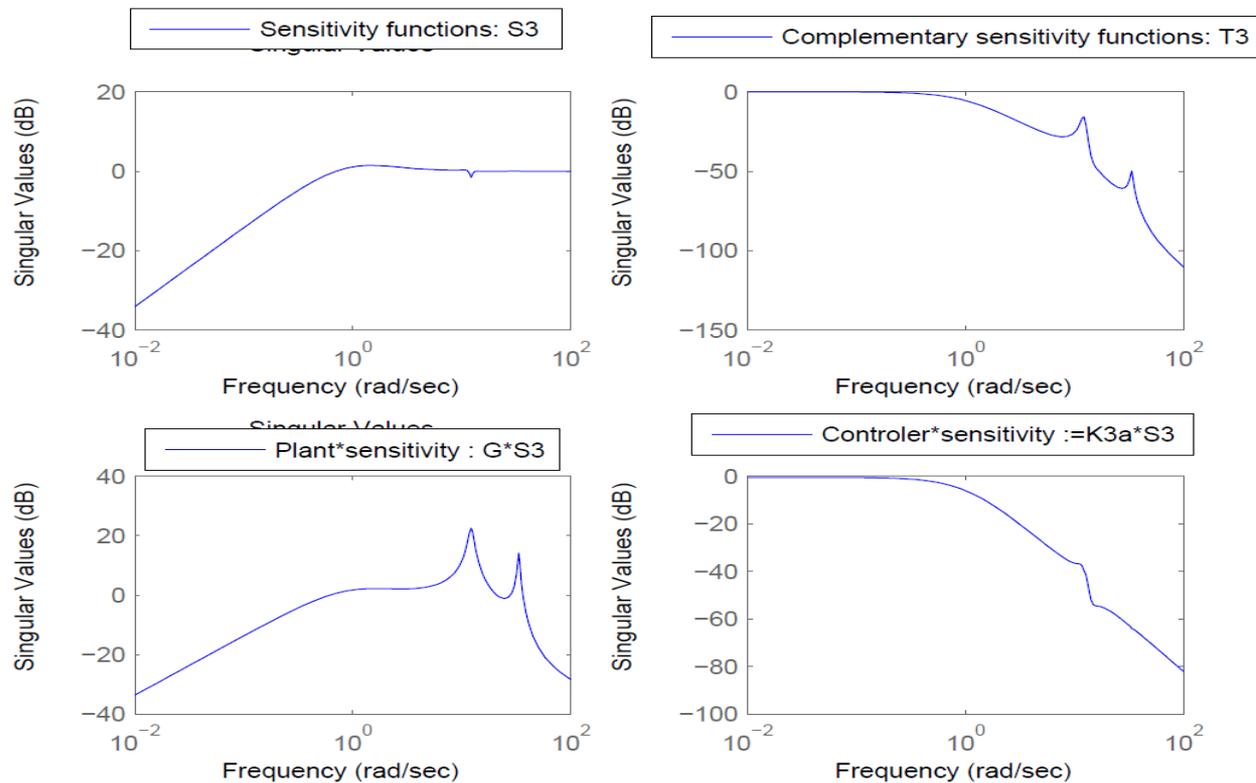
- Tracés

```
figure(3)
subplot(2,2,1), sigma(S3,{WMIN,WMAX});
legend('Sensitivity functions : S3');
subplot(2,2,2), sigma(T3,{WMIN,WMAX});
legend('Complementary sensitivity functions : T3');
subplot(2,2,3), sigma(series(G,S3),{WMIN,WMAX});
legend('Plant*sensitivity : G*S3');
subplot(2,2,4), sigma(series(K3a,S3),{WMIN,WMAX});
legend('Controler*sensitivity :=K3a*S3');
```

- Modules des transferts S, SK, SG et T avec le régulateur 1 (sans pondérations)



- Modules des transferts S, SK, SG et T avec le régulateur 2 (avec pondérations fréquentielles de type intégrateur)



- Synthèse LQ (norme H_2)
 - Régulateur (robustesse $M_G \infty$, $M_M > 1$, $M_P > 60^\circ$)
 - Observateur
- Extension
 - Synthèse LQG
 - Synthèse LTR
 - (On souhaite que le transfert de boucle avec observateur tend asymptotique vers le transfert de boucle sans observateur, afin de conserver les propriétés de robustesse)
 - Synthèse LQG à pondération fréquentielle
 - (Permet de modéliser « loop shape » le transfert de boucle pour obtenir un bon compromis P/R)
- Perspective : Commande robuste à synthèse H_∞

- *Régulateur LQ :*

- *Critère cas discret*

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f-1} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

- *Sous la contrainte*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k \end{aligned}$$

- *Critère cas continu*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R_t u_t) dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$$

- *Sous la contrainte*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- *Résolution du problème LQ :*

- *Critère cas discret*

$$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$

$$L_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$

$$u_k^* = -L_k x_k$$

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$$

Cas général : Trouver $u^*(x, k)$ qui maximise l'Hamiltonien

$$H_{k+1} = -L(x, u, k) + \lambda_{k+1}^T F(x, u, k)$$

où $x_{k+1} = F(x, u, k)$.

$$L(x, u, t) = \frac{1}{2} (x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t)$$

Equations canonique de Hamilton : cas discret

Conditions au premier ordre :

$$x_{k+1} = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta \lambda_{k+1}}$$

$$\lambda_k = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta x_k}$$

avec la condition terminale $\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$.

La maximisation de H conduit à la commande optimale :

$$\left. \frac{\delta H_{k+1}}{\delta u_k} \right|_{u_k=u_k^*} = 0$$

avec la condition au second ordre : $\frac{\delta^2 H_{k+1}}{\delta u_k^2} < 0$

1. Pour $T_f \rightarrow \infty$ (t_1 non spécifié), $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$, $x = x^*$ l'Hamiltonien associé est nul pour tous t .

$$H(x^*, u^*, \lambda^*) = 0, \quad T_f \rightarrow \infty$$

Equations canoniques de Hamilton : cas continu

Les conditions d'optimalité s'expriment simplement par les équations canoniques de Hamilton et le principe du maximum, i.e.,

Conditions au premier ordre :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\delta H}{\delta \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\delta H}{\delta x}\end{aligned}$$

avec la condition terminale $\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$.

La maximisation de H conduit à la commande optimale :

$$\left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0$$

avec la condition au second ordre : $\frac{\delta^2 H}{\delta u^2} < 0$