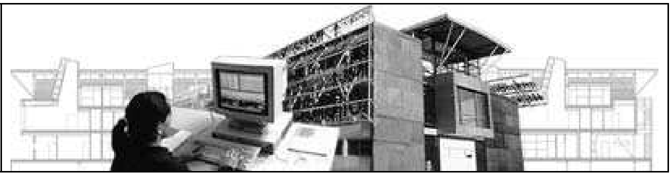
INPG : Ecole ESISAR
5ème Année, module AC-512
Département : AUTOMATIQUE
Auteur : Damien KOENIG



SURVEILLANCE : APPROCHE SURETE DE FONCTIONNEMENT

L'une des évolutions essentielles dans la conception des systèmes automatisés, qu'ils soient unitaires (moteurs, machines industrielles, produits grand public) ou complexes (systèmes de production, de communication, etc) concerne la prise en compte, dès les premières phases, des préoccupations relatives à leur sûreté de fonctionnement. La sûreté de fonctionnement caractérise les performances d'un système en ceci qu'elle rend compte de son aptitude à remplir sa mission. Elle est liée à sa capacité à résister aux défaillances matérielles, logicielles et humaines, et aux agressions de son environnement.
Les domaines aéronautique et nucléaire, ont été les premiers à exprimer et à résoudre les besoins en matière de sûreté de fonctionnement. Toutefois, c'est dans un objectif d'amélioration de la productivité, de cohérence de ses stratégies de maintenance que le monde industriel se pose ces questions et recherche des méthodologies qu'il souhaiterait systématiques.

Une approche sûreté de fonctionnement (probabilité d'atteindre un état de défaillance)
Elle confère à améliorer la sûreté de fonctionnement (S.D.F.) par redondance matérielle. Cet objectif est réalisé par la combinaison d'une réduction de la probabilité d'apparition des défaillances des composants que compose le système à surveiller et par l'amélioration de la structure du système. Améliorer la structure du système équivaut à introduire des redondances dont l'objectif est d'augmenter le nombre et la probabilité des états de bon fonctionnement par rapport aux états de défaillance. Les outils nécessaires à la résolution des problèmes posés seront restreints aux diagrammes de fiabilité et aux chaînes de Markov.

"Ce cours" s'adresse aux étudiants des écoles d'ingénieurs et des universités

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

L'amélioration de la productivité passe par une automatisation de l'outil de production. Automatisation signifie mise systématique et fidèle des actions permettant la réalisation d'un produit avec une variance contrôlée des grandeurs caractéristiques du produit. Une bonne automatisation doit permettre la mise en œuvre d'une solution quasi optimale du processus de fabrication.
Le premier gain à espérer est une amélioration de la qualité du produit fini ou, à qualité égale, un gain économique provenant d'un décalage des spécifications techniques à un niveau moins onéreux. Des exemples classiques peuvent être donnés : processus de fabrication du papier pour lequel la variable principale est le grammage; l'automatisation de fabrication du papier permet de réduire la variance du grammage et déplace la qualité en un point plus proche de la qualité spécifiée. Ceci permet un gain économique.

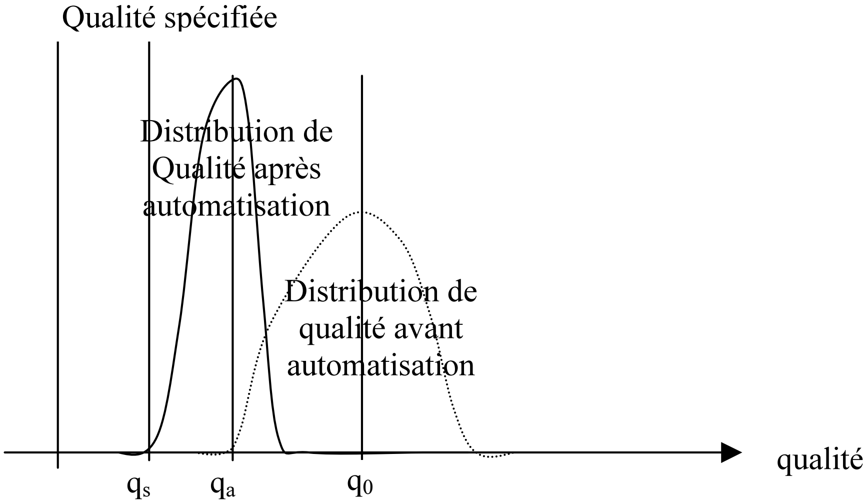


Figure : Distribution de qualité

L'amélioration de la productivité passe bien par une meilleure maîtrise de l'outil de production à travers son automatisation mais également par une maîtrise de la disponibilité. L'automatisation a mis en évidence ce problème car précédemment l'opérateur humain réalisait de façon non explicite un certain nombre de fonctions de maintenance.

A l'automatisation doit donc être associée une stratégie de maintenance qui permettra d'assurer un certain niveau de disponibilité.
Pour maintenir, il faut :
- prévoir le temps de bon fonctionnement moyen (MTBF),
- détecter et diagnostiquer puis réparer.

Ces deux approches donnent lieu à deux types de stratégies de maintenance :
- la maintenance programmée, (section 1)
- la maintenance selon l'état (section 2 et 3).

L'outil de production, qu'il soit du type machine ou processus, est constitué d'un certain nombre d'éléments ou systèmes qui auront des temps de vie ou de bon fonctionnement très différents, certains étant relativement fixes et les autres essentiellement variables selon l'utilisation.

Par exemple, le vilebrequin d'un moteur à explosion ou l'arbre d'une machine tournante ont des durées de vies liées à la fatigue mécanique. Un compteur de cycles permet alors d'en déterminer le "potentiel restant"; sont ainsi développés à partir de calculs de fiabilité et par décrémentation, des compteurs de cycles du potentiel restant simplement dénommés compteurs de potentiels.

La **maintenance programmée** est la stratégie qui a longtemps prévalu et qui consiste à partir d'observations statistiques à déterminer quels sont les temps moyens de bon fonctionnement. On fera une introduction à ce type de maintenance dans la première section du cours.

Il peut arriver cependant qu'une pièce casse avant d'atteindre le MTBF, créant ainsi une panne. Pour contrer ce type de panne, la **maintenance selon l'état** s'appuie sur : "la prise en compte de l'état actuel du système et des équipements associés se servant de toute technique pouvant aller du capteur humain à des systèmes assistés par calculateur, le but étant de prédire la panne et de réaliser la maintenance seulement après identification d'une panne potentielle et en accord avec la production, minimisant ainsi la perte de disponibilité de l'outil de production.

L'objet des sections 2 et 3 est de sensibiliser le lecteur au fait que les outils de détection, diagnostic et pronostic sont des éléments nécessaires pour résoudre le problème de disponibilité qui, à son tour est inclus dans une politique de maintenance. Ceci est symbolisé sur la figure suivante :

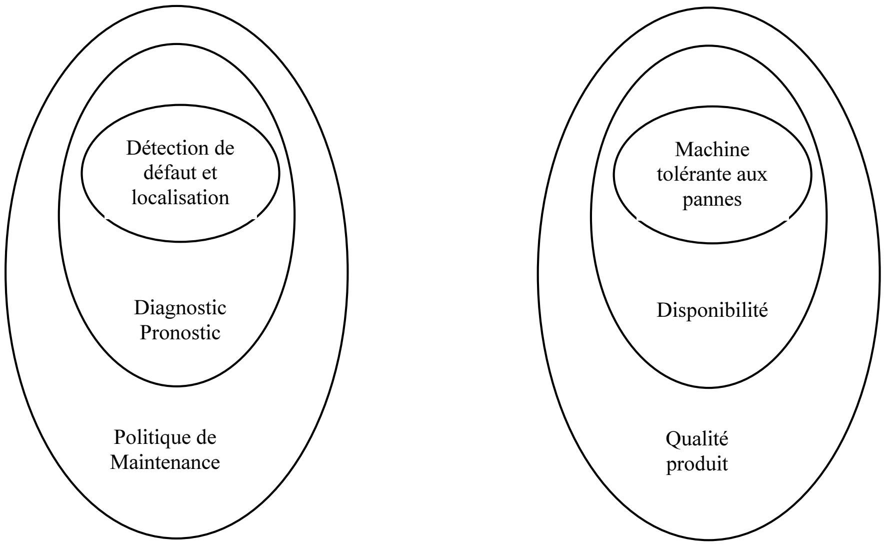


Figure : Hiérarchie des problèmes et résultats associés

Les problèmes doivent être étudiés selon cette hiérarchie et avant tout traités au stade de la conception de façon à inclure capteurs et système de traitement de l'information dans une approche système globale.

L'objectif de ce cours est donc de rassembler les outils pluridisciplinaires nécessaires à la bonne formulation et à la construction de système de diagnostic dans le cadre d'une stratégie de maintenance. Nous nous appuierons fortement sur l'utilisation de modèles, bien qu'en matière de détection diagnostic il s'agisse avant tout de satisfaire les fonctions pour développer un système fiable.

MAINTENANCE PROGRAMMEE

1 SURETE : FIABILITE, MAINTENABILITE ET DISPONIBILITE

La prise en compte des impératifs de la sûreté de fonctionnement dès les premières phases de la conception d'une application n'est pas immédiate. Les techniques classiques d'analyse de sûreté de fonctionnement permettent une première approche de la fiabilité d'un système en particulier par le biais d'indicateurs instantanés et moyens ou encore par l'identification de scénarios de pannes. Pour tenir compte de la fiabilité humaine, des méthodes s'appuyant sur l'ergonomie, la psychologie cognitive, … sont également développées. Un aspect important de cette approche réside dans la nécessité d'utiliser le retour d'expérience que ce soit en conception ou en exploitation, c'est à dire de tenir compte de l'apparition de défauts de leurs caractéristiques afin d'ajuster les données statistiques utilisées dans les modèles quantitatifs d'évaluation de la sûreté de fonctionnement.

La sûreté de fonctionnement peut être vue comme étant le traitement des fautes (s'attaquer aux sources des défaillances) :

- prévention des fautes,
- tolérance aux fautes,
- élimination des fautes,
- prévision des fautes.

1.1 Composantes de la sûreté de fonctionnement

Fiabilité : R(t) Maintenabilité : M(t)

Disponibilité : A(t)

Si l'entité[1] est non repérable alors la composante maintenabilité n'existe pas et $A(t) = R(t)$.
Si au contraire l'entité est réparable alors $A(t) \geq R(t)$.

1.1.1 Fiabilité

A l'origine (1960) sciences des défaillances. Traduction de l'anglais Reliability.

Définition : Aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée.

Mesure: La fiabilité se mesure par la probabilité qu'une entité E accomplisse une fonction requise dans les conditions données pendant l'intervalle de temps [0, t] (ou encore $[t_1, t_2]$)

$$R(t) = P\text{ (E soit non défaillante sur [0, t])}$$

$$R(t_1, t_2) = P\text{ (E soit non défaillante sur } [t_1, t_2])$$

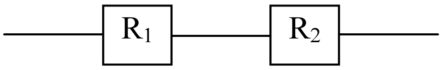
1 $\searrow$ 0

L'aptitude contraire $\overline{R}(t) = 1 - R(t)$ est la probabilité de défaillance de l'entité.

[1] Entité: Tout élément, composant, sous système, unité fonctionnelle, équipement ou système que l'on peut considérer individuellement.

Architecture de fiabilité

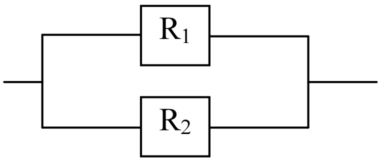
<u>Série</u>



Fiabilité du système :

$$R(t) = R_1*R_2=0.9*0.9=0.81$$

<u>Parallèle</u>



Le système est en panne si tous les éléments sont en pannes :

$$R(t) = 1-(1-R_1)(1-R_2) = 0.99$$

défaillance

1.1.2 Maintenabilité

Définition : Aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits.

Mesure : La maintenabilité se mesure par la probabilité que la maintenance d'une entité E, assurée dans des conditions données et avec des moyens et des procédures, s'achève à l'instant t, sachant que l'entité est défaillante à l'instant t = 0

M(t) = P (E défaillante à l'instant zéro soit réparée à l'instant t)
= 1-P(E non réparée sur (0, t) sachant que E est défaillant à t = 0)

$0 \nearrow 1$

M(t_1, t_2) = P (E défaillante à t = t_1 soit réparée à t = t_2)

Type de maintenance : la notion de maintenabilité définie ici est relative aux systèmes réparables et caractérise l'aptitude d'un système à reprendre sa fonction après défaillance grâce aux opérations de maintenance. Il s'agit alors d'une <u>maintenance corrective</u>.

On a recours aussi à la <u>maintenance différée</u>, à la <u>maintenance préventive</u> programmée ou non programmée.

1.1.3 Disponibilité

Définition : Aptitude d'une entité à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données et à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné.

Mesure : La disponibilité se mesure par la probabilité qu'une entité E soit en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données à l'instant t

A(t) = P (E non défaillante à l'instant t)

Cette caractéristique est appelée disponibilité instantanée.

La notion contraire est aussi appelée indisponibilité notée U(t)=1-A(t)

1.2 Temps caractéristiques pour la S.D.F

Les grandeurs caractérisant la S.D.F sont d'abord les durées de fonctionnement : avant défaillance, entre défaillance, entre défaillance et réparation, etc … Ces temps dépendent des probabilités d'occurrence des divers événements défaillances, réparations.

MTTFF (mean time to first failure) : durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance, espérance mathématique de la durée de fonctionnement avant la première défaillance.

MTTF (mean time to failure) : durée moyenne de fonctionnement avant défaillance, espérance mathématique de la durée de fonctionnement avant défaillance.

MTBF (mean operating time beetween failures) : moyenne des temps de bon fonctionnement, espérance mathématique de la durée de bon fonctionnement.

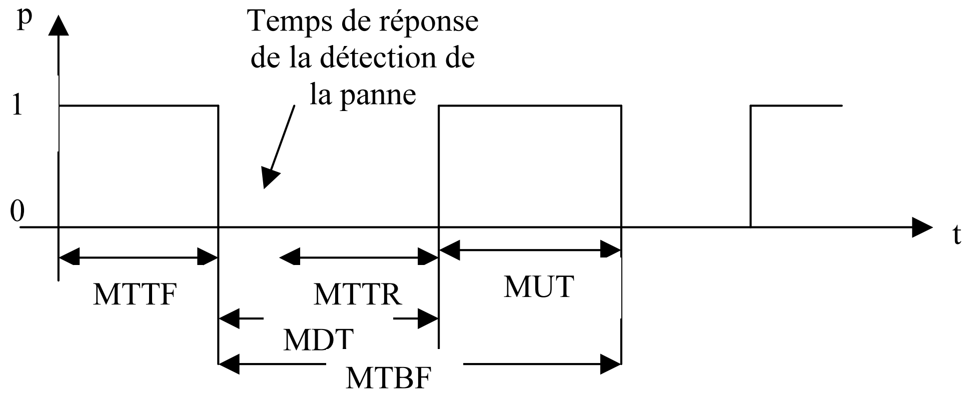
MRT (mean repair time) : durée moyenne de réparation, espérance mathématique de la durée du temps de réparation.

MTTR (mean time to recovery or restoration) : durée moyenne de panne ou moyenne des temps pour la tâche de réparation; espérance mathématique de la durée de panne.

MUT (mean up time) : temps moyen de disponibilité, espérance mathématique de la durée de disponibilité, durée moyenne de bon fonctionnement après réparation (temps de production).

MDT (mean down time) : temps moyen d'indisponibilité, espérance mathématique de la durée d'indisponibilité.

MADT (mean accumulated down time) : durée cumulée moyenne d'indisponibilité, espérance mathématique de la durée cumulée d'indisponibilité pendant un intervalle de temps donné.



1.3 Relations fondamentales pour la fiabilité

On note T la variable aléatoire caractérisant le "Temps de bon fonctionnement de l'Entité" et t le temps présent.

Fiabilité : $R(t) = P(T > t)$
Défaillance : $F(t) = P(T \leq t)$ sur $[0, t]$

$$\boxed{F(t) + R(t) = 1}$$

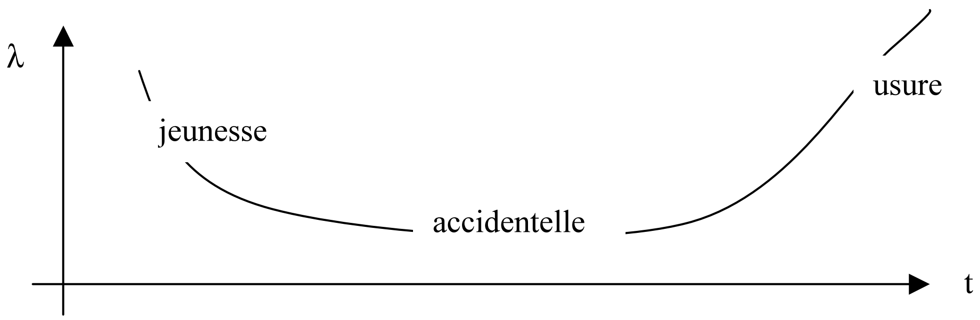
1.3.1 Densité de probabilité de défaillance (ou fonction de distribution)

$$F(t) = 1 - R(t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$\boxed{f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}}$$

1.3.2 Taux de défaillance

Généralement, la loi de variation du taux de défaillance $\lambda(t)$ évolue dans le temps suivant trois périodes (forme de baignoire) :



λ décroissant : période de jeunesse, déverminage - test pour éliminer

λ constant : période utile, action de la maintenance

λ croissant : période de vieillesse, maintenance inadéquate
annonce de la fin "vie utile"

Le problème posé aux fiabilistes est donc d'abord de modéliser chacune de ces phases par des lois de probabilité connues.

Le calcul du taux de défaillance est donné par l'expression suivante

$$\boxed{\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} = \frac{f(t)}{R(t)}}$$

Preuve : Par définition λ(t) est une probabilité conditionnelle

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P\begin{pmatrix} \text{E en panne} & \text{et} & \text{E non déf} \\ \text{entre } [t, t+\Delta t] & & \text{sur } [0,t] \end{pmatrix}}{P(\text{E non déf sur } [0,t])}$$

or R(t) = P (E soit non défaillante sur [0, t]), il vient :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} \left[P\begin{pmatrix} \text{E en panne} \\ \text{sur } [0, t+\Delta t] \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \text{E en panne} \\ \text{sur } [0,t] \end{pmatrix} \right]$$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} \left[(1 - R(t+\Delta t)) - (1 - R(t)) \right]$$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} \left[R(t) - R(t+\Delta t) \right]$$

Si la fonction R(t) est dérivable, on obtient bien l'expression du taux de défaillance, à savoir :

$$\boxed{\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} \geq 0}$$

1.3.3 Relation entre λ(t) et R(t)

Rappel : λ = taux de défaillance
R = fiabilité

D'après l'expression précédente, il vient :

$$\int_0^t \lambda(t)dt = -\int_0^t \frac{dR(t)}{R(t)} = -\text{Log}R(t)$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}}$$

1.3.4 Relation entre λ(t) et f(t)

Rappel : f = densité de probabilité de défaillance

Sachant que $f(t) = \lambda(t) \times R(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$ il vient :

$$\boxed{f(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}}$$

1.3.5 Calcul du MTTF

Rappel : MTTF = durée moyenne de fonctionnement avant défaillance.

$$\boxed{MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt}$$

Preuve :

$$MTTF = \int_0^\infty t \times f(t) \times dt = -\int_0^\infty t \times \frac{dR(t)}{dt} \times dt$$

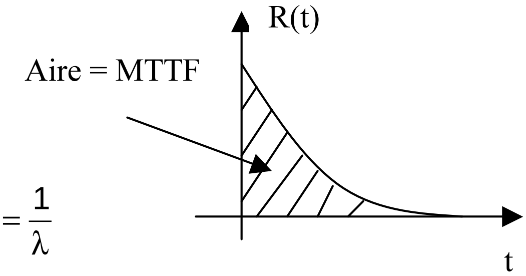
$$MTTF = -[t \times R(t)]_0^\infty + \int_0^\infty R(t) \times dt$$

Cas particulier : Distribution exponentielle, λ constant

C'est le cas des composants électroniques en période utile (nécessiter de déverminage)

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\lambda t}$$

il vient $MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \times dt = -\left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$



Ce modèle est le plus utilisé car il permet une simplification pour le calcul de fiabilité des systèmes composés de nombreuses entité différentes. En outre, le passé de tels systèmes n'affecte pas leur évolution future.

La plupart des lois de probabilité sont utilisées en fiabilité pour modéliser λ (t) et calculer les MTTF. Exemple la loi normale convient aux composants usés dont le taux de défaillance augmente avec t, la loi de Weibull est très utilisée pour les composantes dont les taux de défaillance varient beaucoup, tel la mécanique.

1.4 Relations fondamentales pour la maintenabilité

On note T la variable aléatoire caractérisant le "Temps de réparation de l'entité" si l'entité est défaillante à t = 0.

Rappel :

Non - Maintenabilité : $\overline{M}(t) = P(T > t)$

Maintenabilité : $M(t) = P(T \leq t)$

(l'entité est réparée car T le temps de réparation est écoulé)

$$\boxed{\overline{M}(t) + M(t) = 1}$$

1.4.1 Densité de probabilité de réparation (ou fonction de distribution)

Sachant que :

$$M(t) = 1 - \overline{M}(t) = \int_0^t g(t)dt$$

on obtient, pour une fonction de répartition M(t) continue, la relation suivante :

$$\boxed{g(t) = \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{d\overline{M}(t)}{dt}}$$

où g(t)dt est la probabilité pour que l'entité soit réparée entre t et t + dt :

$$g(t)dt = P\,[\,t < T \leq t + dt\,]$$

1.4.2 Taux de réparation

Le Taux de réparation $\mu(t)$ est une probabilité conditionnelle.

C'est la limite si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle pour que l'instant T de réparation d'une entité soit compris entre t et t + Δt, par la durée de l'intervalle Δt lorsque celui-ci tend vers zéro, sachant que l'entité est restée en panne sur l'intervalle [0, t] :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t < T \leq t + \Delta t \quad / T > t]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P\begin{pmatrix} \text{E soit réparée} & \text{et} & \text{E en panne} \\ \text{entre } [t, t+\Delta t] & & \text{sur } [0, t] \end{pmatrix}}{P(\text{E en panne sur } [0, t])}$$

or M(t) = P (E soit réparée sur [0, t]), il vient :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{P\begin{pmatrix}\text{E soit réparée}\\ \text{sur } [0, t+\Delta t]\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix}\text{E soit réparée}\\ \text{sur } [0, t]\end{pmatrix}}{P(\text{E non réparée sur } [0, t])}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{1 - M(t)}\right]$$

Si la fonction maintenabilité M(t) est dérivable alors

$$\boxed{\mu(t) = \frac{1}{1 - M(t)}\frac{dM(t)}{dt} \geq 0}$$

Ou encore $\mu(t) = -\frac{1}{\overline{M}(t)}\frac{d\overline{M}(t)}{dt} = \frac{g(t)}{\overline{M}(t)}$.

1.4.3 Relation entre μ(t) et M(t)

Rappel : μ = taux de réparation
M = maintenabilité

D'après l'expression précédente, il vient :

$$\int_0^t \mu(t)dt = -\int_0^t \frac{d\overline{M}(t)}{\overline{M}(t)} = -\mathrm{Log}\,\overline{M}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{M}(t) &= e^{-\int_0^t \mu(t)dt}\\ M(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}\end{aligned}}$$

1.4.4 Relation entre $\mu(t)$ et $g(t)$

Rappel : g = densité de probabilité de réparation

Sachant que $g(t) = \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{d\overline{M}(t)}{dt}$

il vient :

$$\boxed{g(t) = \mu(t)e^{-\int_0^t \mu(t)dt}}$$

1.4.5 Calcul du MTTR

Rappel : MTTR = temps moyen de réparation

Le MTTR étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire T de densité de probabilité g, on a donc :

$$MTTR = \int_0^\infty tg(t) \times dt = \int_0^\infty t\frac{dM(t)}{dt} \times dt$$

$$MTTR = [tM(t)]_0^\infty - \int_0^\infty M(t) \times dt = [tM(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (1 - \overline{M}(t)) \times dt$$

or $M(\infty) = 1 \Rightarrow$ $\boxed{MTTR = \int_0^\infty \overline{M}(t) \times dt}$

Dans le cas d'une distribution exponentielle, le taux de réparation μ est constant et le MTTR est égal à l'inverse de μ :

$$MTTR = \int_0^\infty \overline{M}(t) \times dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu dt} \times dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \times dt = -\left[\frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{MTTR = \frac{1}{\mu}}$$

1.5 Relations fondamentales pour la disponibilité

Rappel : La disponibilité se mesure par la probabilité qu'une entité E soit en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données à l'instant t

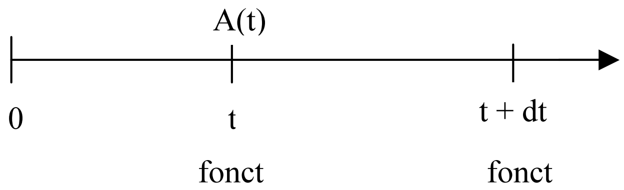
A(t) = P (E non défaillante à l'instant t)

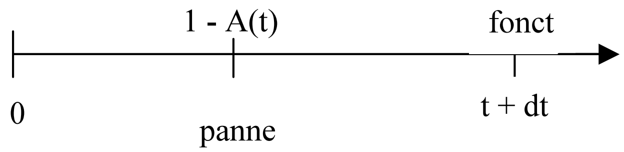
Entité non réparable : $A(t) = R(t) = e^{-\lambda t}$
Entité réparable : $A(t) \geq R(t)$

Hypothèse de travail : λ et μ constants.

D'après le rappel, on peut noter que lorsque l'entité est réparable, la disponibilité d'une entité à l'instant t + dt est égale à la probabilité pour que l'entité soit disponible à t et qu'elle ne retombe pas en panne entre t et t+dt ou que l'entité étant panne à l'instant t, elle soit réparée à l'instant t + dt :

A(t+dt) = P (E en fonctionnement à t et pas de panne sur]t, t + dt]
+ P (E en panne à t et réparée sur] t, t + dt])





Les deux cas étant complètement indépendants, on applique le théorème des probabilités totales où λdt est la probabilité de défaillance entre]t, t + dt] et 1 - λdt la probabilité de fonctionnement entre]t, t + dt] :

$$A(t+dt) = A(t)(1-\lambda dt) + (1-A(t))\mu dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{A(t+dt) - A(t)}{dt} = -A(t)\times\lambda + (1 - A(t))\times\mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{dA(t)}{dt} + (\lambda+\mu)\times A(t) = \mu$$

Conclusion

- si A(0) = 1 (Entité disponible à t = 0) alors

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)\times t}$$

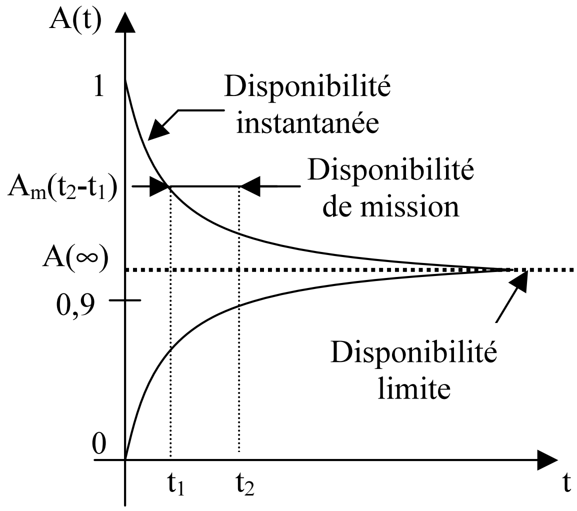
- si A(0) = 0 (Entité indisponible à t = 0) alors

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)\times t}\right)$$

- disponibilité asymptotyque

$$A(\infty) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \forall \quad A(0)$$

$$A(\infty) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{MTTF}{MTTR + MTTF}$$



La disponibilité asymptotique est donc égale à la proportion du temps pendant lequel l'entité est en état de fonctionnement.

On a de même l'indisponibilité $1 - A(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{MTTR}{MTTR + MTTF}$

Ces relations, démontrées dans le cas λ et μ constants, sont également vraies pour des taux non constants.

Remarque : généralement, MTTF >> MTTR => A(∞) ≅ 1.

1.6 Diagrammes de fiabilité ou diagrammes de succés

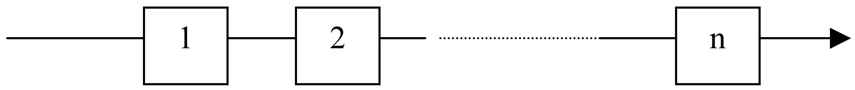
(Reliability block diagram method)

C'est la méthode la plus anciennement connue pour le calcul de la fiabilité des ***<u>systèmes non réparables.</u>*** Bien qu'elle puisse aussi s'appliquer aux systèmes réparables, son usage y reste limité.

Le digramme de fiabilité représente les conditions de réalisation de la fonction d'un système composé de sous systèmes caractérisés par leur fiabilité.

1.6.1 Système série

Est un système composé d'au moins 2 sous-systèmes, tel que l'événement E_i, défaillance d'un d'entre eux, entraîne l'événement E, défaillance du système.



$$R(t) = P(\overline{E}) = P\left[\overline{E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } \cdots \text{ ou } E_n}\right]$$

Si les sous systèmes sont indépendants du point de vue de leurs défaillances, la fiabilité du système est le produit des fiabilités des sous ensembles :

$$\begin{aligned} R(t) &= P\left[\overline{E}\right] = P\left[\overline{E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } \cdots \text{ ou } E_n}\right] \\ &= P\left[\overline{E_1}\right] \times P\left[\overline{E_2}\right] \cdots P\left[\overline{E_n}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\left[\overline{E_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(x)dx} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{n} -\int_0^t \lambda_i(x)dx} \end{aligned}$$

1.6.1.1 Taux de défaillance constant : $\lambda_i = \lambda$

Si le taux de défaillance est constant pour chaque sous ensemble,

$$R(t) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \times t}$$

Le taux de défaillance du système est donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

et le MTTF du système

$$MTTF = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Si les composants sont tous identiques, $MTTF = \frac{1}{n\lambda}$

Il est n fois plus petit que celui de chaque composant.

Application numérique : 1 élément $\lambda = 10^{-3}\ h^{-1} \Rightarrow MTTF = 1000h$
$\mu = 1h^{-1} \Rightarrow MTTR = 1h$

2 éléments en série sans réparation
$\Rightarrow MTTF = 1/2\lambda = 500h$

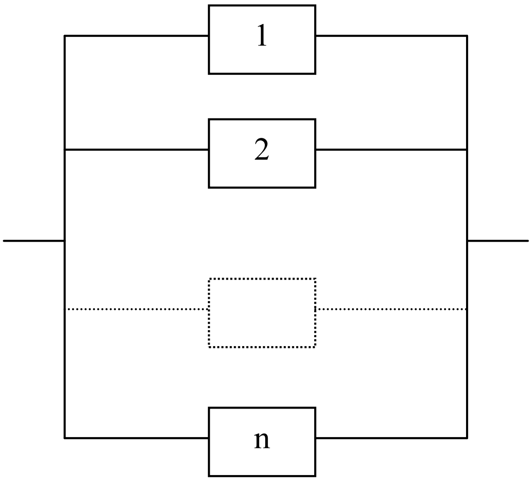
1.6.1.2 Taux de défaillance linéairement croissant : $\lambda_i = k_i * t$

$$R(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{t^2}{2}}$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\sum_{i=1}^{n} k_i}}$$

Exercice : déterminer R(t) et MTTF pour un taux de défaillance de Weibull : $\lambda_i = k_i * t^{m_i}$

1.6.2 Système parallèle



Le système fonctionne dès que l'un au moins des sous systèmes fonctionne, sa défaillance implique la défaillance de tous les sous ensembles.

$$1 - R(t) = P[\bar{E}_1 \text{ et } \bar{E}_2 \text{ et } \cdots \text{ et } \bar{E}_n]$$

Si les systèmes sont mutuellement indépendants :

$$1 - R(t) = [1 - R_1(t)] \times [1 - R_2(t)] \cdots [1 - R_n(t)]$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(x) dx}\right)$$

Dans le cas simple de deux sous systèmes en parallèle

R = 1 - (1-R$_1$)(1-R$_2$)

$$MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Si les 2 éléments ont le même taux λ de défaillance et la même fiabilité

$$R = 1 - (1-R_1)^2$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt = \frac{1.5}{\lambda}$$

Si le taux de défaillance est constant et identique pour tous les éléments :

$$MTTF = \int_0^\infty R(t) \times dt = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

Application numérique :

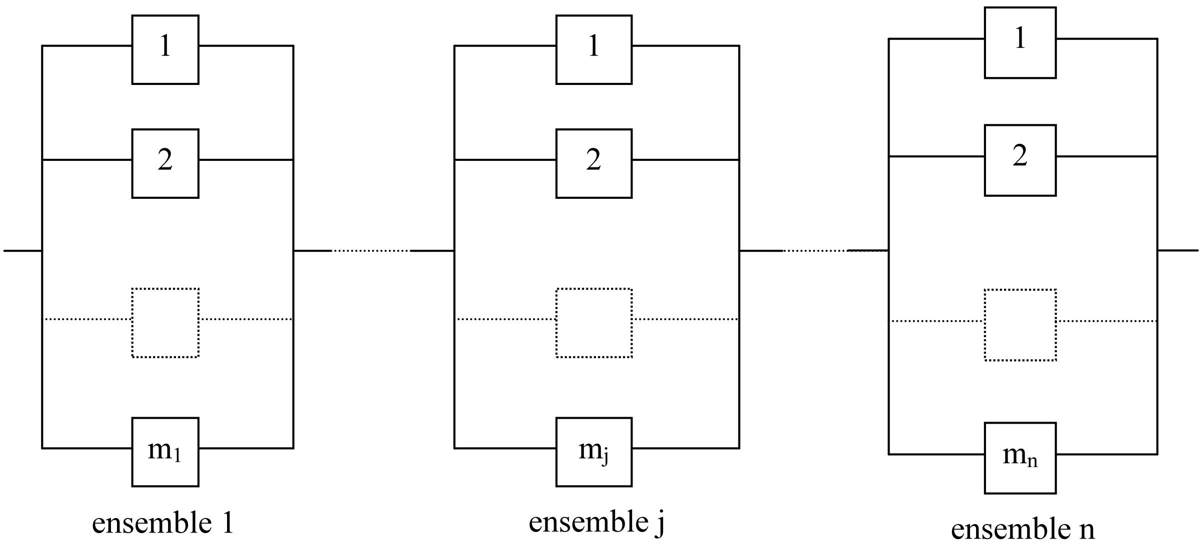
On considère 2 éléments identiques en parallèle avec $\lambda = 10^{-3}\ h^{-1}$ et sans réparation

$$\Rightarrow MTTF = 3/2\lambda = 1500h$$

Remarque : c'est 3 fois mieux que deux éléments en série.

1.6.3 Système mixte

1.6.3.1 Système parallèle série



Fiabilité d'un ensemble j :

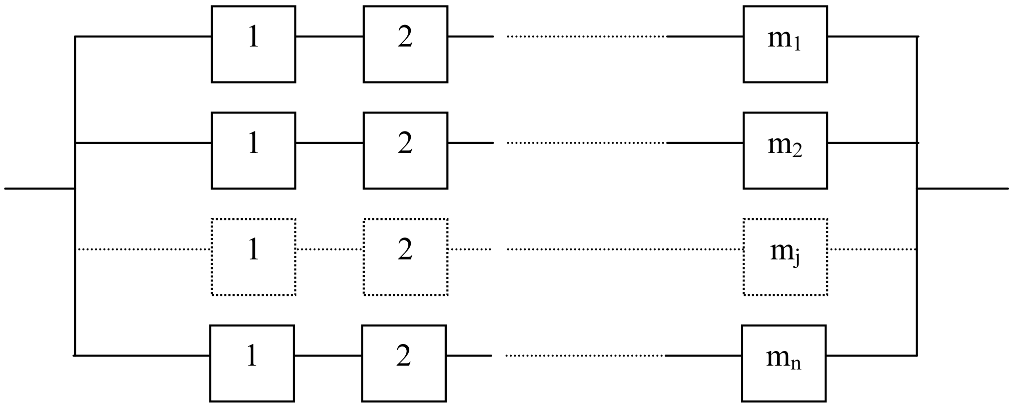
$$R_j(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m_j}\left(1 - R_{ij}(t)\right)$$

R_{ij} est la fiabilité de l'élément i du $j^{ème}$ ensemble.

Fiabilité du système :

$$R(t) = \prod_{j=1}^{n} R_j = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m_j}\left(1 - R_{ij}(t)\right)\right)$$

1.6.3.2 Système série parallèle



Fiabilité d'une branche série :

$$R_j = \prod_{i=1}^{m_j} R_{ij}$$

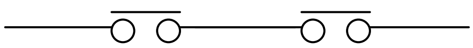
Fiabilité de l'ensemble :

$$R = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - R_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=1}^{m_j} R_{ij}\right)$$

1.6.4 Remarque sur la nature des diagrammes de fiabilité

Supposons que le défaut d'un relais (risque) soit de ne pas se fermer, on placera alors un second en parallèle réalisant ainsi une redondance parallèle.

Supposons maintenant que le défaut majeur d'un relais soit de ne pas s'ouvrir. On place alors un deuxième relais en série.



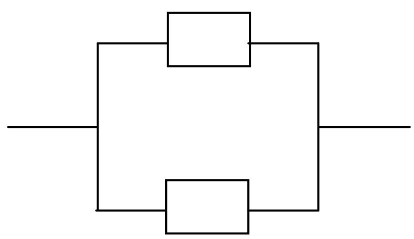


Schéma électrique Diagramme de fiabilité

Electriquement, les deux relais sont en série, mais formellement, du point de vue fiabilité, ils sont en parallèle. On a réalisé une redondance parallèle.

On conçoit donc aisément que pour augmenter la fiabilité de systèmes on soit amené à mettre des sous systèmes en parallèle ou en série, selon la nature des défauts majeurs de ces derniers.

1.6.5 Outils complémentaires

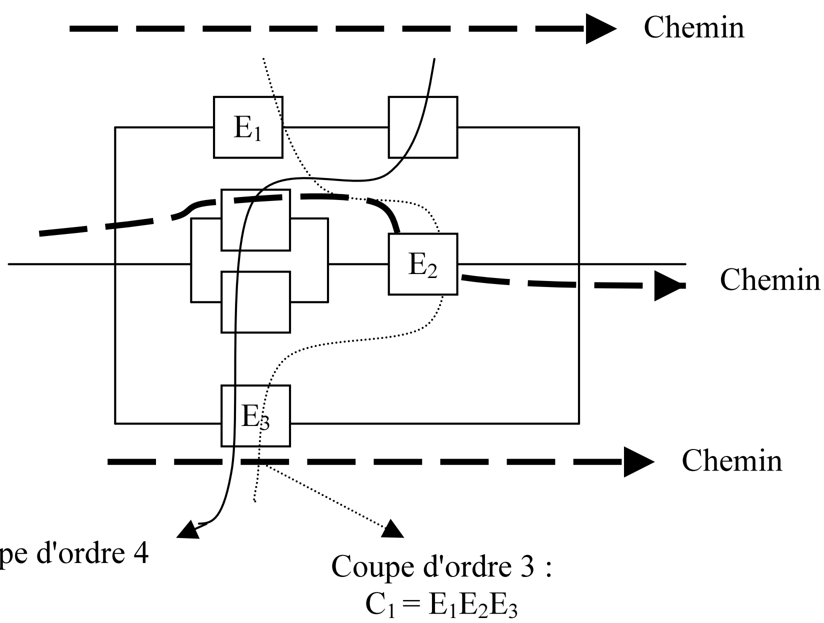
Définitions

Chemin : ensemble d'entité dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système.

Chemin minimal : plus petite combinaison d'entités assurant le fonctionnement.

Coupe : ensemble d'éléments dont la panne entraîne la panne du système ou encore ensemble d'éléments coupant chaque chemin de succès.

Coupe minimale : coupe contenant aucune autre coupe, est un ensemble d'événements tous nécessaires pour entraîner la panne.



La probabilité que le système soit en panne est égale à celle qu'une ou plusieurs coupes soient vraies, (panne si apparition d'une coupe)

$$\overline{A} = \overline{R} = 1 - R = P[C_1 + C_2 + \cdots C_m] = P\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\right)$$

où d'après le théorème de Poincaré

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(C_i) - \sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1} P(C_i \times C_j) + \sum_{j=3}^{m}\sum_{k=2}^{j-1}\sum_{i=1}^{k-1} P(C_i \times C_j \times C_k) - \cdots (-1)^m P(C_1 \times C_2 \cdots C_m)$$

$$P(C_i) = P(E_1) \times P(E_2) \cdots P(E_n) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j) = \prod_{j=1}^{n} (1 - R_j)$$

R_j correspond à la fiabilité du composant dont la défaillance première constitue l'événement j de la coupe i.

Sachant par ailleurs que les probabilités de coupes sont en général faibles et d'autant plus que leur ordre est élevé et que la fiabilité des entités est grande (la défaillance première a une probabilité = 1 - fiabilité) :

$$\overline{R} = P\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\right) \cong \sum_{i=1}^{n} P[\text{Coupe minimale}_i]$$

Exemple 2 entités en série :

$$\begin{aligned}
&R = R_1 R_2 = (1-\overline{R}_1)(1-\overline{R}_2) \\
&\Leftrightarrow 1-\overline{R} = 1-\overline{R}_2-\overline{R}_1+\overline{R}_1\overline{R}_2 \\
&\Leftrightarrow \overline{R} = \overline{R}_1+\overline{R}_2-\overline{R}_1\overline{R}_2
\end{aligned}$$

Si les fiabilités sont grandes alors

$$\overline{R} \cong \overline{R}_1+\overline{R}_2 = C_{min\,1}+C_{min\,2}$$

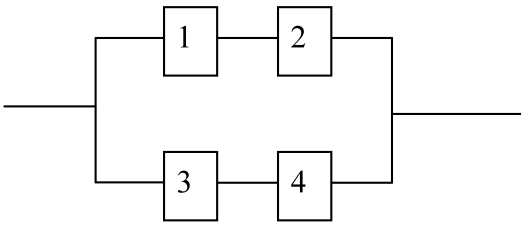
Exemple 3 entités en série :

$$\begin{aligned}
&R = R_1 R_2 R_3 = (1-\overline{R}_1)(1-\overline{R}_2)(1-\overline{R}_3) \\
&\Leftrightarrow 1-\overline{R} = (1-\overline{R}_2-\overline{R}_1+\overline{R}_1\overline{R}_2)(1-\overline{R}_3) \\
&\Leftrightarrow 1-\overline{R} = 1-\overline{R}_3-\overline{R}_2+\overline{R}_2\overline{R}_3-\overline{R}_1+\overline{R}_1\overline{R}_3+\overline{R}_1\overline{R}_2-\overline{R}_1\overline{R}_2\overline{R}_3 \\
&\Leftrightarrow \overline{R} = \overline{R}_1+\overline{R}_2+\overline{R}_3-\overline{R}_1\overline{R}_2-\overline{R}_1\overline{R}_3-\overline{R}_2\overline{R}_3+\overline{R}_1\overline{R}_2\overline{R}_3
\end{aligned}$$

Si les fiabilités sont grandes alors

$$\overline{R} \cong \overline{R}_1+\overline{R}_2+\overline{R}_3 = C_{min\,1}+C_{min\,2}+C_{min\,3}$$

1.6.5.1 Calcul de fiabilité du système par la méthode des chemins



Chemin	Coupe
1-2	1-3
3-4	2-4
	1-4
	2-3

R(t) = $P[\overline{E}]$ où $\overline{E}$ exprime la **non** défaillance du système.

Chemin 1 $\rightarrow R^{ch_1}(t) = P[\overline{E_1 \text{ ou } E_2}] = P[\overline{E}_1] \times P[\overline{E}_2] = \prod_i R_i^{ch_1} = R_1 R_2$

Chemin 2 $\rightarrow R^{ch_2}(t) = P[\overline{E_3 \text{ ou } E_4}] = P[\overline{E}_3] \times P[\overline{E}_4] = \prod_i R_i^{ch_2} = R_3 R_4$

Le système fonctionne (i.e. fiable) dès que l'un au moins des sous systèmes fonctionne (i.e. R^{ch}_1 ou R^{ch}_2), sa défaillance implique la défaillance de tous les sous ensembles :

Défaillance : $1-R(t)=P\left[\overline{\text{chemin 1}}\right]\times P\left[\overline{\text{chemin 2}}\right]=\left(1-R^{ch_1}\right)\left(1-R^{ch_2}\right)$

Fonctionnement : $R(t)=1-P\left[\overline{\text{chemin 1"}}\right]\times P\left[\overline{\text{chemin 2}}\right]=1-\left(1-R^{ch_1}\right)\left(1-R^{ch_2}\right)$

$$R(t)=1-\left(1-R_1R_2\right)\left(1-R_3R_4\right)$$

Généralisation

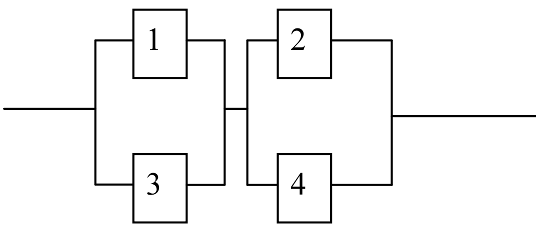
La fiabilité d'un système par la méthode des chemins est donnée par l'expression suivante :

$$R(t)=1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-P\left(\text{chemin}_j\right)\right)=1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-R^{ch_j}\right)=1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\prod_i R_i^{ch_j}\right)$$

où k est l'ensemble des chemins minimaux et $\prod_i R_i^{ch_j}$ la fiabilité du chemin j composé de i entités en série.

Remarque : Si l'ensemble des entités que forme le chemin $_j$ sont vrai alors $\prod_i R_i^{ch_j}=1$ et donc R(t) = 1. La formule reste vraie si on ajoute aux liens minimaux des liens non minimaux.

1.6.5.2 Calcul de fiabilité du système par la méthode des coupes



Chemin
1-2
3-4
3-2
1-4

Coupe
1-3
2-4

$\Rightarrow$ Plus fiable que le système précédent.

Coupe 1 $\rightarrow$ $\overline{R}^{c_1}(t)=\overline{R}_1^{c_1}\overline{R}_3^{c_1}$

Coupe 2 $\rightarrow$ $\overline{R}^{c_2}(t)=\overline{R}_2^{c_2}\overline{R}_4^{c_2}$

$$R(t)=P\left[\overline{\text{Coupe}_1}\right]P\left[\overline{\text{Coupe}_2}\right]=\prod_{j=1}^{2}\left(1-P\left[\text{Coupe}_j\right]\right)=\prod_{j=1}^{2}\left(1-\prod_i\overline{R}_i^{c_j}\right)=\left(1-\overline{R}_1^{c_1}\overline{R}_3^{c_1}\right)\left(1-\overline{R}_2^{c_2}\overline{R}_4^{c_2}\right)$$

Généralisation

La fiabilité d'un système par la méthode des coupes est donnée par l'expression suivante :

$$R(t)=\prod_{j=1}^{k}\left(1-P\left[\text{Coupe}_j\right]\right)=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\prod_i\overline{R}_i^{c_j}\right)=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\prod_i\left(1-R_i^{c_j}\right)\right)$$

où k est l'ensemble des coupes minimales et $\prod_i\overline{R}_i^{c_j}$ la "<u>non</u> fiabilité" du système engendré par la coupe j composé de i entités en parallèles.

1.6.5.3 Application aux systèmes réparables

Particularité : Les événements de base apparaissent puis disparaissent au gré des défaillances et des réparations.

A chaque événement correspond 1 taux d'apparition (taux de défaillance du composant dont la défaillance constitue l'événement de base) $\lambda_i dt$ = probabilité d'apparition sur]t, t + dt] sachant qu'il n'est pas apparu sur [0, t].

De même pour le taux de disparition, $\mu_i dt$ est la probabilité de disparition sur]t, t + dt] sachant que l'événement est présent sur [0, t].

Le système est indisponible si et seulement si l'une au moins des coupes minimales est présente :

$$\overline{A}(t) \cong \sum_{i=1}^{n} \overline{A}(C_i,\ t)$$

avec $\overline{A}(C_i,\ t) = \prod_{j=1}^{m_i} \overline{a}_j(t)$

Chaque coupe i est d'ordre m_i et à chaque événement est associé une disponibilité : le composant est ou non disponible.

On sait que pour un composant non réparable :

$$\overline{a}_j(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda_j t} \cong \lambda_j t$$

pour un composant réparable :

$$\overline{a}_j(t) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}\left[1 - e^{-(\lambda_j + \mu_j)t}\right]$$

Remarque : Les calculs de fiabilité et de maintenabilité à partir de l'arbre des causes sont complexes et ne peuvent généralement qu'être approchés.

1.6.6 Exercices

1.6.6.1 Exercice 1

L'alimentation principale (380 kV) peut être secourue en cas de défaillance par le réseau auxiliaire (220 kV) et par les deux diesels.

On dira que l'on a la fonction alimentation électrique si l'un des deux jeux de barres *HA* ou *HB* est sous tension.

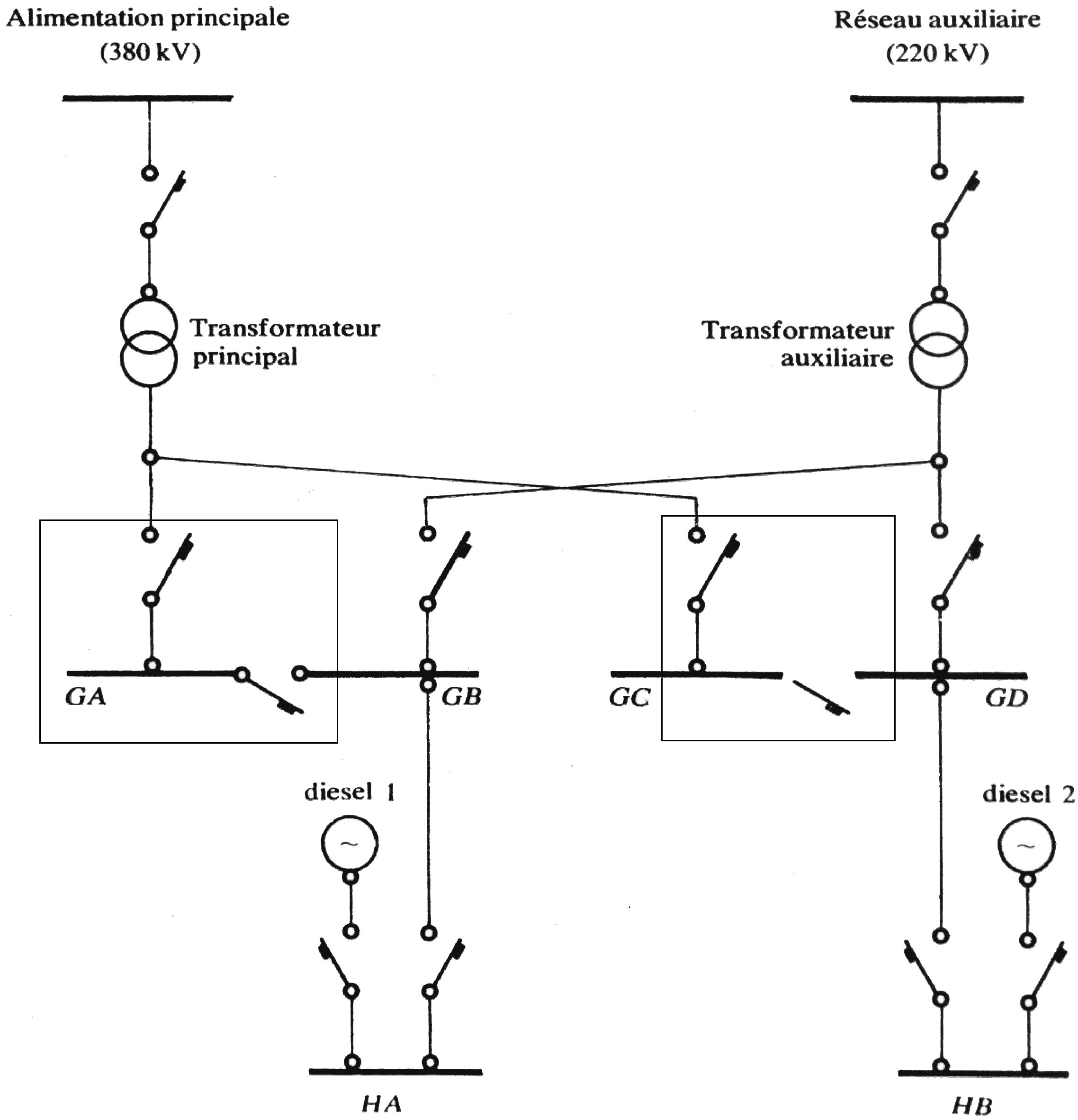
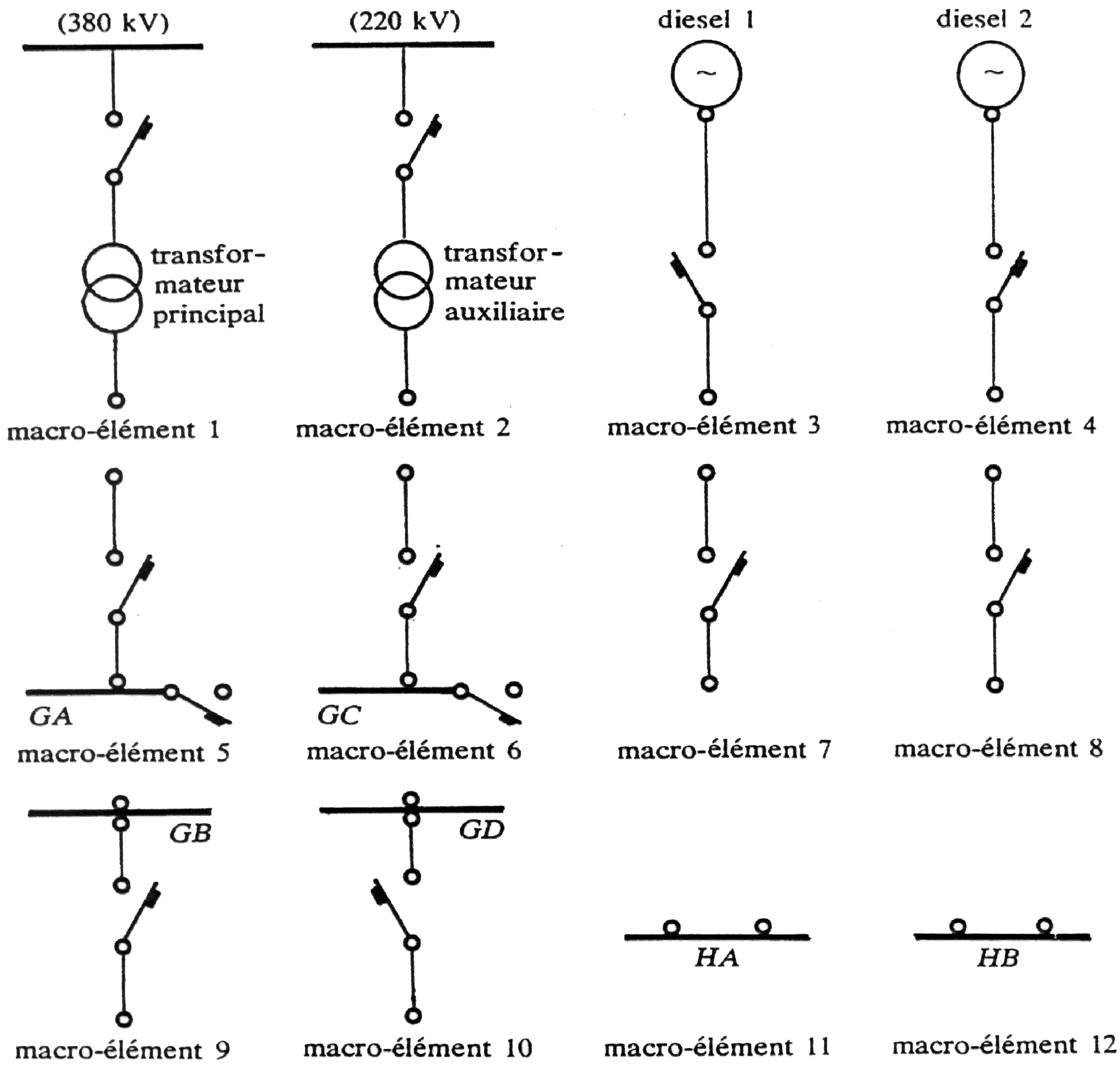


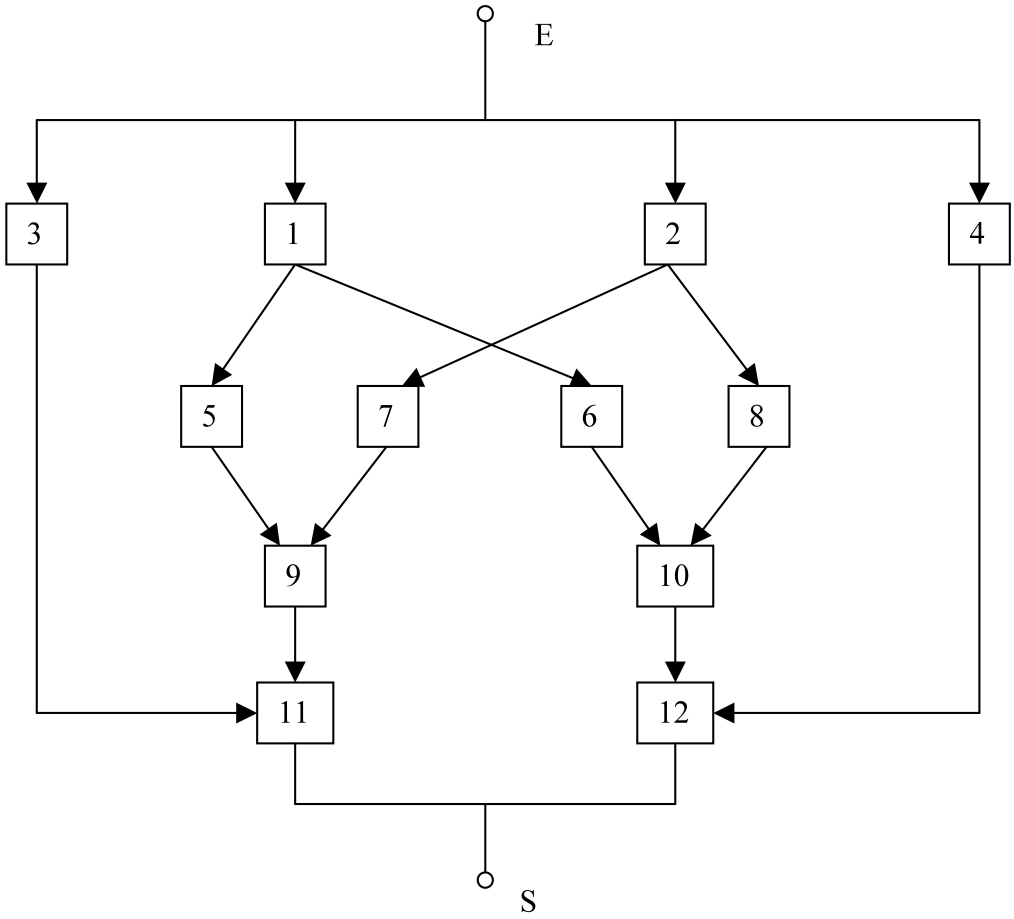
Schéma d'une alimentation électrique

Considérons alors les macro - éléments suivants :



On demande de tracer le diagramme de fiabilité, de rechercher les chemins et les coupes.

Solution :



Chemins :

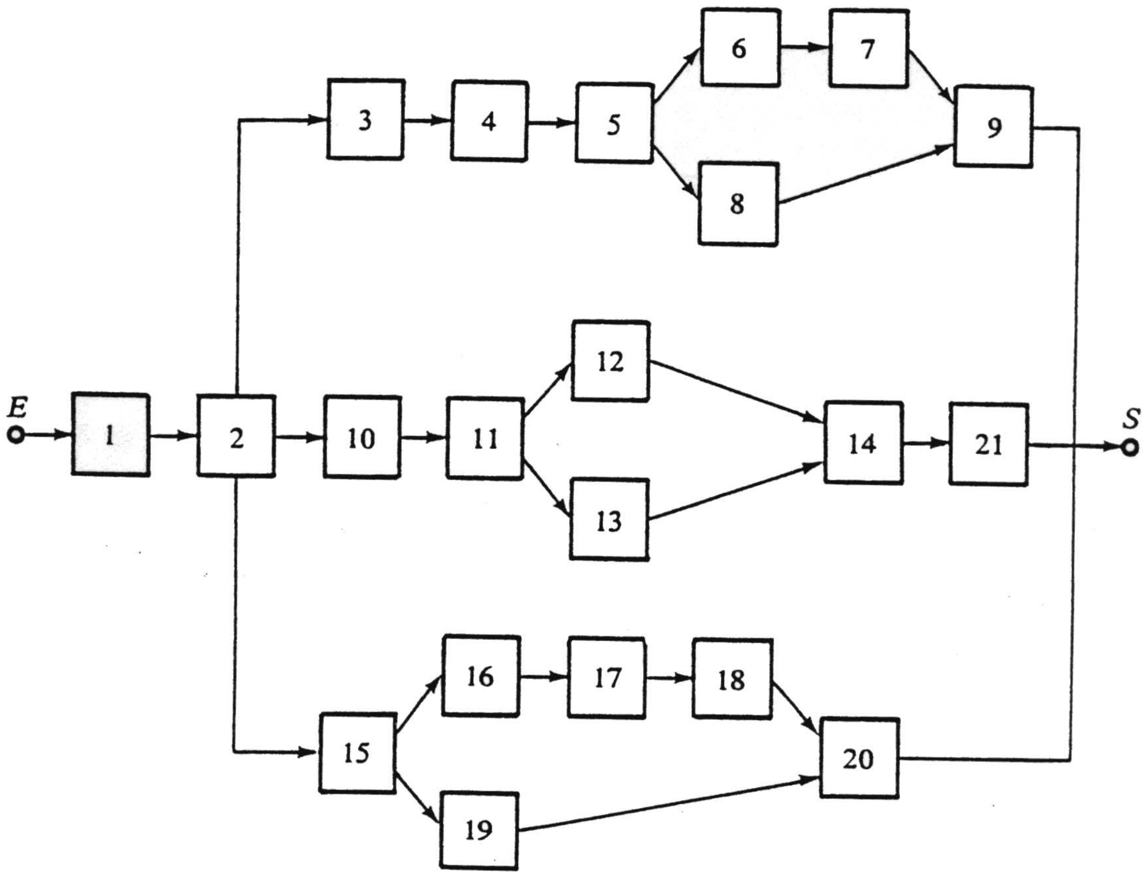
1, 6, 10, 12
4, 12
3, 11
1, 5, 9, 11
2, 7, 9, 11
2, 8, 10, 12

Coupes :

11, 12
3, 9, 10, 4
3, 9, 12
4, 10, 11
1, 2, 3, 4
11, 4, 1, 2
11, 4, 1, 8
11, 4, 2, 6
11, 4, 6, 8
12, 3, 1, 2
12, 3, 1, 7
12, 3, 2, 5
12, 3, 5, 7

1.6.6.2 Exercice 2

Déterminer l'indisponibilité asymptotique du système.



avec $\bar{q}_3(\infty) = \bar{q}_4(\infty) = \bar{q}_6(\infty) = \bar{q}_8(\infty) = \bar{q}_{11}(\infty) = \bar{q}_{14}(\infty) = \bar{q}_{21}(\infty) = \bar{q}_{15}(\infty) = \bar{q}_{20}(\infty) = 10^{-3}$, $\bar{q}_5(\infty) = \bar{q}_7(\infty) = \bar{q}_{16}(\infty) = \bar{q}_{17}(\infty) = \bar{q}_{19}(\infty) = 3\,.\,10^{-3}$, $\bar{q}_9(\infty) = \bar{q}_{10}(\infty) = \bar{q}_{12}(\infty) = \bar{q}_{18}(\infty) = 10^{-2}$, $\bar{q}_{13}(\infty) = 10^{-1}$, $\bar{q}_1(\infty) = \bar{q}_2(\infty) = 10^{-7}$.

L'ensemble $\{6, 7\}$ a pour indisponibilité asymptotique $\bar{q}_6 + \bar{q}_7 = 4\,.\,10^{-3}$.
L'ensemble $\{6, 7, 8\}$ a donc pour indisponibilité $4\,.\,10^{-3} \cdot \bar{q}_8 = 4\,.\,10^{-6}$.
L'ensemble $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a donc pour indisponibilité

$$\bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \bar{q}_5 + 4\,.\,10^{-6} + \bar{q}_9 = 1{,}5\,.\,10^{-2}.$$

L'ensemble $\{10, 11, 12, 13, 14, 21\}$ a pour indisponibilité

$$\bar{q}_{10} + \bar{q}_{11} + \bar{q}_{12}\,\bar{q}_{13} + \bar{q}_{14} + \bar{q}_{21} = 1{,}4\,.\,10^{-2}.$$

L'ensemble $\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ a pour indisponibilité

$$\bar{q}_{15} + (\bar{q}_{16} + \bar{q}_{17} + \bar{q}_{18})\,\bar{q}_{19} + \bar{q}_{20} = 2\,.\,10^{-3}.$$

L'ensemble $\{1, 2\}$ a pour indisponibilité

$$\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = 2\,.\,10^{-8}.$$

Finalement le système de la figure a pour indisponibilité asymptotique :

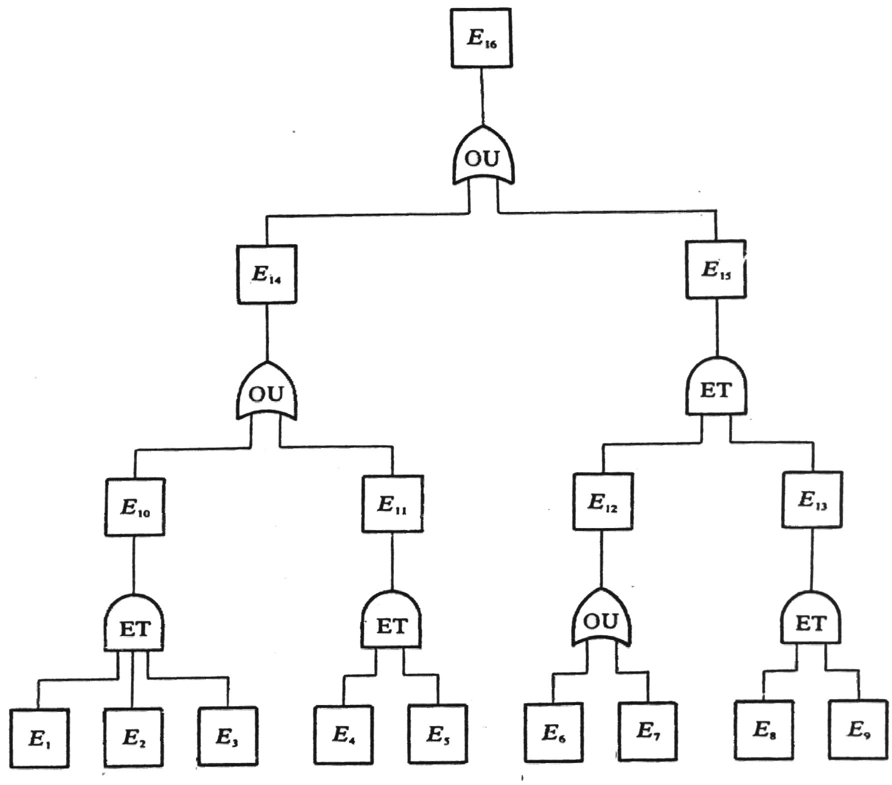
$$\bar{A}_\infty = 2\,.\,10^{-7} + (1{,}5\,.\,10^{-2})(1{,}4\,.\,10^{-2})(2\,.\,10^{-3}) = 6{,}2\,.\,10^{-7}.$$

Rappel : fiabilité $R_{67} = R_6 R_7$

Indisponibilité $\overline{Q}_{67} = 1 - R_{67} = 1 - R_6 R_7 = 1 - (1 - \overline{R}_6)(1 - \overline{R}_7) = \overline{R}_6 + \overline{R}_7$

1.6.6.3 Exercice 3

Rechercher les coupes minimales.



avec $p_1(\infty) = p_2(\infty) = p_6(\infty) = p_8(\infty) = p_9(\infty) = 10^{-2}$, $p_3(\infty) = p_7(\infty) = 2 \,.\, 10^{-2}$, $p_4(\infty) = p_5(\infty) = 10^{-3}$.

$p_{10} = p_1\, p_2\, p_3 = 2 \,.\, 10^{-6}$, $p_{11} = p_4\, p_5 = 10^{-6}$, $p_{12} = p_6 + p_7 = 3 \,.\, 10^{-2}$, $p_{13} = p_8\, p_9 = 10^{-4}$, $p_{14} = p_{10} + p_{11} = 3 \,.\, 10^{-6}$, $p_{15} = p_{12}\, p_{13} = 3 \,.\, 10^{-6}$, $p_{16} = p_{14} + p_{15} = 6 \,.\, 10^{-6}$.

Coupe minimale : minimum d'événement qui génère E_{16}, ici $E_1E_2E_3$ ou E_4E_5.

CONCLUSION

Cette méthode (diagramme de fiabilité) permet de calculer la fiabilité d'un système à partir de l'étude de sa structure fonctionnelle qui permet de définir le diagramme de fiabilité. Elle devient difficile à appliquer pour les structures non simples. On peut également l'utiliser pour le calcul de la S.D.F (maintenabilité, disponibilité).

Elle peut être systématisée pour les cas non simples en faisant appel à la théorie des graphes, cf [1].

Il faut noter qu'elle exige de nombreuses conditions : sous système indépendant, taux constants, etc…

Elle peut cependant s'appliquer en dehors de ces hypothèses mais exige alors des calculs plus complexes. Voir [2] pp97 à 106 pour l'étude de systèmes à éléments à plusieurs états (ex: bon état, court circuit, circuit ouvert) dépendants et de taux de défaillance variables.

D'autres techniques existent, exemple :

- méthode de l'arbre des causes
- analyse des modes de défaillance et de leurs effets

Nous ne les détaillerons pas ici, cependant le lecteur désireux d'approfondir le sujet pourra s'informer au travers des lectures suivantes [1], [2] et [3].

1.7 Fiabilité des systèmes réparables (Formulation Markovienne)

Elle est l'application de la théorie des processus stochastiques à l'étude de la S.d.F. des systèmes. Les premières utilisations datent de 1950.

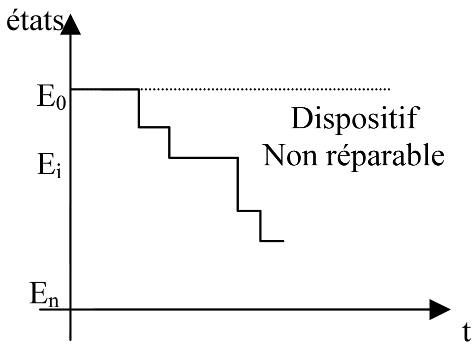
L'évaluation de la fiabilité des systèmes réparables est rendue difficile à cause de la dépendance introduite entre les éléments. Nous n'examinerons ici que le cas, le plus fréquent, où le nombre des états de chaque élément est fini. Le plus souvent, chaque élément possédera deux états : "marche" et "panne". L'ensemble Ω des états du système sera donc fini, il sera possible de numéroter ces états. L'observation du système au cours du temps sera alors décrit successivement par ces différents états.

1.7.1 Principe

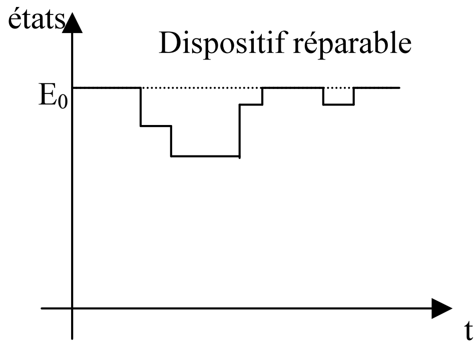
1.7.1.1 Etats d'un système

Un ensemble redondant, d'ordre n, peut être caractérisé à un instant quelconque t par son :

Etat E_i : i éléments, identiques, hors services
Etat E_0 : les éléments fonctionnent tous (état de bon fonctionnement)
Etat E_n : les éléments sont tous hors services (état de panne)



Processus de mortalité



Processus de mortalité
Processus de naissance

1.7.1.2 Système stochastique

Si on connaît les probabilités de tous les événements du type (à l'instant t, le système est dans un état E(t) appartenant à un sous-ensemble e donné de Ω)

$$P[E(t) \in e]; \subset \Omega$$

ainsi que les probabilités conjointes d'un nombre quelconque de ces événements :

$$P[E(t_1) \in e_1;\ E(t_2) \in e_2;\ \cdots \quad E(t_n) \in e_n]$$

pour tout n $n \in N\,;\, e_i \subset \Omega$

alors l'évolution du système est décrite par un processus stochastique.

1.7.1.3 Processus markoviens

Processus stochastique à états discrets pour lesquels on a :

$$P[E(t_n) = E_n \ / \ E(t_1) = E_1, \cdots E(t_{n-1}) = E_{n-1}] = P[E(t_n) = E_n \ / \ E(t_{n-1}) = E_{n-1}]$$

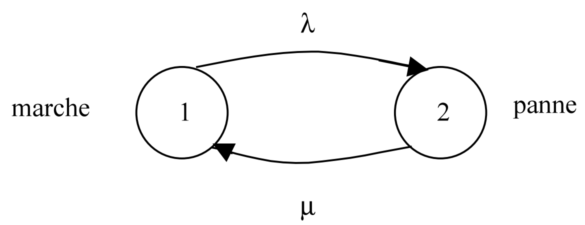
pour tout n tel que $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$.

La connaissance de l'état du système aux instants $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ est une information entièrement contenue dans la connaissance de l'état du système à l'instant t_{n-1}.

Autrement dit, est un processus markovien un processus stochastique dans lequel l'état présent du système ne dépend que de l'état précédent (et non de son passé c'est à dire qu'il ne dépend pas de comment il a atteint cet état précédent ni combien de temps il à été dans cet état).

1.7.1.4 Application à la S.D.F

Tous les systèmes dont l'état de fonctionnement futur ne dépend que de l'état présent peuvent être décrits par un processus de Markov et en particulier, ceux pour les lesquels les probabilités de transition entre 2 états quelconques ne sont pas affectés par le temps. Il est alors homogène. C'est le cas de tous les phénomènes à distribution exponentielle (i.e. taux de défaillance λ et taux de réparation μ constants).



Chaque sommet représente un état du système et chaque arête une transition ij valuée par le taux de transition a_{ij}, ici λ et μ.

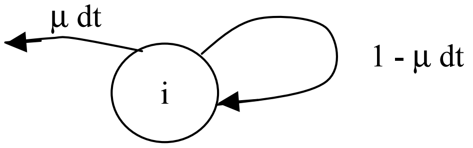
1.7.1.5 Equations générales des probabilités d'états

Probabilités :

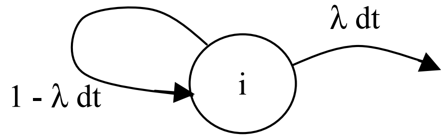
$P(i, t)$	être dans l'état E_i à l'instant t
$P(i+1 \rightarrow i, t) = \mu \, dt$	naissance (réparation) entre t et t + dt
$P(i-1 \rightarrow i , t) = \lambda \, dt$	défaillance entre t et t + dt

Si à l'instant t + dt, S est dans E_i cela suppose :

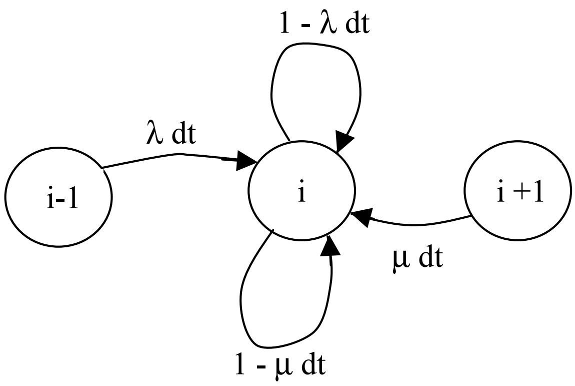
	à t	avec proba	et entre t et t + dt
1°)	E_{i-1}	$P_{i-1}(t)$	1 défaillance (proba : λ dt)
			0 naissance (proba : 1 - μ dt)
ou 2°)	E_i	$P_i(t)$	0 défaillance (proba : 1 - λ dt)
			0 naissance (proba : 1 - μ dt)
ou 3°)	E_{i+1}	$P_{i+1}(t)$	0 défaillance (proba : λ dt)
			1 naissance (proba : μ dt)



Il y a naissance ou rien entre t et t + dt



Il y a défaillance ou rien entre t et t + dt



$$P_i(t+dt) = P_{i-1} \times \lambda dt + P_i \times (1-\lambda dt) \times (1-\mu dt) + P_{i+1} \times \mu dt$$

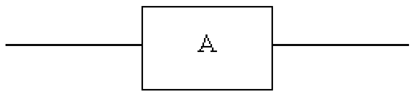
En négligeant les termes d'ordre deux et plus

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{P_i(t+dt) - P_i(t)}{dt} = \lambda P_{i-1}(t) + \mu P_{i+1}(t) - (\lambda + \pi) P_i(t)$$

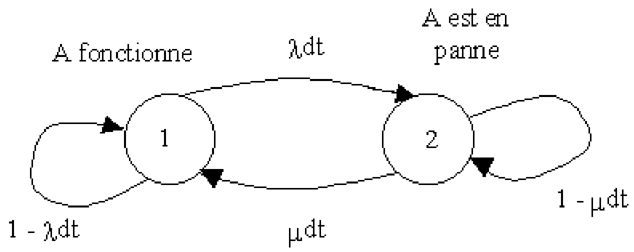
$$\text{avec} \begin{cases} \sum P_i(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \frac{P_i(t)}{dt} = 0 \\ \text{conditions aux limites} \quad (i = 0 \quad \text{et} \quad i = n) \end{cases}$$

1.7.1.6 Exemple

On considère le système simple à deux états



élément



graphe de Markov

Problème : On cherche à quantifier la disponibilité du système A

Conditions initiales : P(0) = (1, 0) ⇔ au départ le système fonctionne $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = 0$.

Rappel : $\sum P_i(t) = 1$ ou $\sum \frac{P_i(t)}{dt} = \sum P_i^{'}(t) = 0 \Rightarrow$ ici $P_1 + P_2 = 1 \quad \forall\, t$ ou $P_1^{'} + P_2^{'} = 0$

<u>Résolution du problème :</u>

$$P_1(t+dt) = P_1(t) \times (1-\lambda dt) + P_2(t) \times \mu dt$$

$$P_2(t+dt) = P_2(t) \times (1-\mu dt) + P_1(t) \times \mu dt$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\left(P_1(t+dt)\ P_2(t+dt)\right) = \left(P_1(t)\ P_2(t)\right) \times \begin{pmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(t+dt) = P(t) \times M}$$

Où $M = \begin{pmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{pmatrix}$ est la matrice des probabilités qui caractérise le système.

On développe et on ordonne :

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{P_1(t+dt) - P_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{P_2(t+dt) - P_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t)$$

Remarque : La somme $\frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{dP_2(t)}{dt}$ est nulle.

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} & \frac{dP_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & P_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \times Q}$$

où $\frac{dP(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} & \frac{dP_2(t)}{dt} \end{pmatrix}$, $P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) & P_2(t) \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$.

Cette nouvelle martice Q, appelée matrice des taux de transition peut être construite aisément suivant le principe :

Etat 1	Etat 2	↖	
$-\lambda$	λ	Etat 1	La somme des probabilités de chaque ligne est toujours nulle
μ	$-\mu$	Etat 2	

Les conditions initiales étant $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = 0$, on obtient par transformée de Laplace :

$$\begin{cases} pP_1(p) - 1 = -\lambda P_1(p) + \mu P_2(p) \\ pP_2(p) - 0 = \lambda P_1(p) - \mu P_2(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+\lambda)P_1(p) - \mu P_2(p) = 1 \\ -\lambda P_1(p) + (p+\mu)P_2(p) = 0 \end{cases}$$

Système de cramer :

$$\Delta = (p+\lambda)(p+\mu) - \lambda\mu = p(p+\mu+\lambda)$$
$$\Delta_{p_1} = p + \mu$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{p+\mu}{p(p+\mu+\lambda)} = \frac{1}{p+\mu+\lambda} + \frac{\mu}{p(p+\mu+\lambda)}$$

La transformation inverse donne

$$P_1(t) = e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$

Conclusion

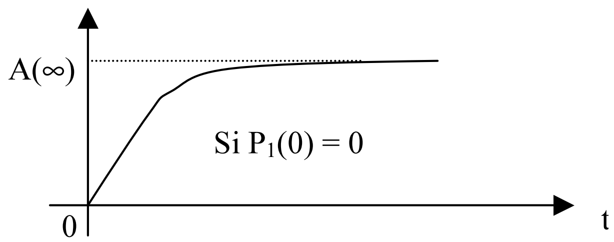
La disponibilité vaut : $A(t) = P_1(t) = e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$

L'indisponibilité vaut : $1 - A(t) = P_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$

Vérification : $P_1(t) + P_2(t) = 1 \quad \forall\, t$.

Remarque : On retrouve le résultat du calcul de la disponibilité A(t) énoncée en section 1.5.

A titre d'exercice vous pouvez déterminer la disponibilité du système pour les conditions initiales $P_1(0) = 0$ et $P_2(0) = 1$ et monter que la disponibilité asymptotique est bien égale à $A(\infty) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$ quelque soit les conditions initiales.



1.7.1.7 Généralisation : calcul de la probabilité P(t)

Problème : Déterminer la probabilité de se trouver dans un quelconque des états, connaissant l'état de départ.

La probabilité de se trouver dans un état donné i à l'instant t + dt est égale à celle de ne pas passer d'un quelconque des n-1 autres états, sachant qu'à l'instant t on était déjà à l'état i, augmentée des probabilités de passer d'un quelconque état j différent de i sachant qu'on se trouvait dans cet état j :

$$P_i(t+dt) = P_i(t) \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(1 - a_{ij}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} P_j(t) \times a_{ji} \times dt$$

En négligeant les termes d'ordre ≥ 2, on obtient :

$$P_i(t+dt) = P_i(t) \times \left[1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ji} \times dt\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} P_j(t) \times a_{ji} \times dt$$

On peut rassembler les 2 termes dans le même signe $\sum$ en remarquant que $P_i(t)$ ne se trouve pas dans le 2^e terme et en posant

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} = a_{ii}$$

On peut alors étendre la somme a tout j de 1 à n :

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} P_j \times a_{ij}$$

On écrit cette équation pour tous les états 1 à n du système.

On obtient alors un système d'équations différentielles du 1er ordre que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\left[\frac{dP_1(t)}{dt}\ \frac{dP_2(t)}{dt}\ \cdots\ \frac{dP_n(t)}{dt}\right] = [P_1(t)\ P_2(t)\ \cdots\ P_n(t)] \times Q$$

en explicitant Q :

$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^{n} a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -\sum_{j=1,\, j\neq 2}^{n} a_{2j} & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \cdots & & -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & & \cdots & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \end{bmatrix}$$

La matrice Q est une matrice carrée de dimension n égale au nombre des états du système. Pour le cas des processus homogènes (coefficients de Q constants) qui nous intéressent ici, la matrice Q est singulière, la somme des coefficients d'une ligne étant nulle.

L'équation $\left[\frac{dP_1(t)}{dt}\ \frac{dP_2(t)}{dt}\ \cdots\ \frac{dP_n(t)}{dt}\right] = [P_1(t)\ P_2(t)\ \cdots\ P_n(t)] \times Q$ que l'on écrit parfois sous la forme symbolique suivante est l'équation de Chapman - Kolmogorov du système :

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \times Q$$

$$\Leftrightarrow P(p)(pI - Q) = P(0)$$

Si on connaît l'état initial (certitude d'être dans un certain état) P(0), alors on peut écrire :

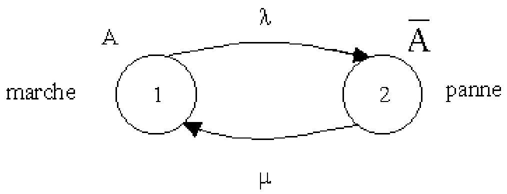
$$P(t) = P(0) \times e^{Qt}$$

Cette relation représente alors la probabilité de se trouver dans un quelconque des états, connaissant l'état de départ.

1.7.2 Architectures

1.7.2.1 Système à 1 entité

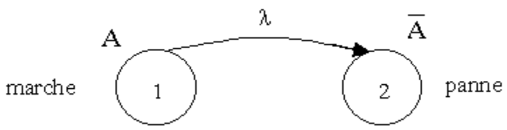
En appelant A l'entité en état de marche et $\overline{A}$ l'entité en état de panne, on obtient dans le cas du calcul de la disponibilité le graphe de Markov suivant :



Disponibilité : $A(t) = P_1(t) = 1- P_2(t)$

Fig. 1-1 : Système à 2 états (disponibilité)

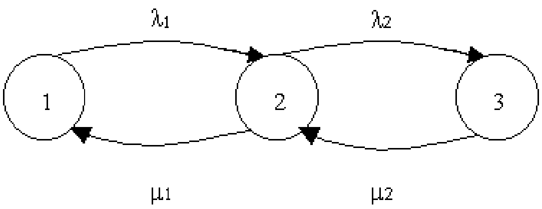
En rendant l'état 2 absorbant on obtient le graphe de Markov pour le calcul de la fiabilité :



Fiabilité : $R(t) = P_1(t) = 1- P_2(t)$

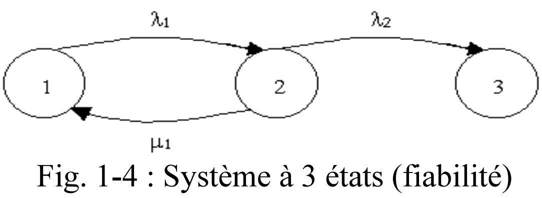
Fig. 1-2 : Système à 2 états (fiabilité)

Si on considère les 3 états : marche, marche dégradée, panne, on obtient dans le cas du calcul de la disponibilité le graphe de Markov suivant :



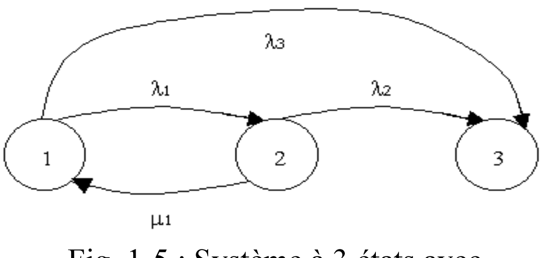
$A(t) = P_1(t) + P_2(t) = 1- P_3(t)$

Fig. 1-3: Système à 3 états (disponibilité)



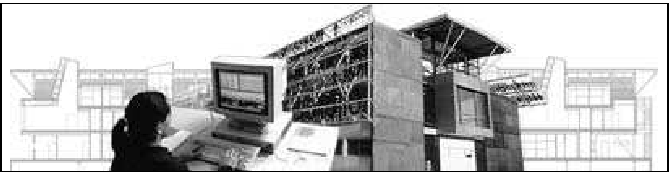
$R(t) = P_1(t) + P_2(t) = 1- P_3(t)$

Fig. 1-4 : Système à 3 états (fiabilité)



$R(t) = P_1(t) + P_2(t) = 1- P_3(t)$

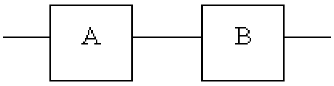
Fig. 1-5 : Système à 3 états avec défaillance catastrophique direct (fiabilité)

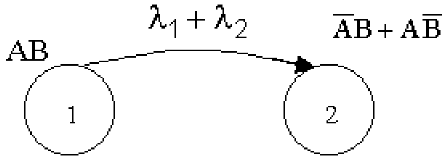


1.7.2.2 Système à 2 entités

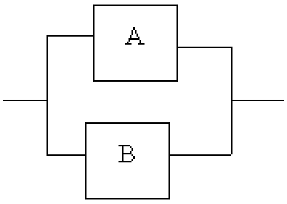
Dispositif non réparable

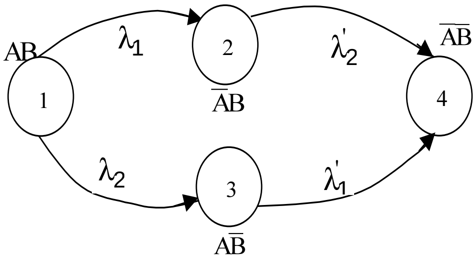
Série :





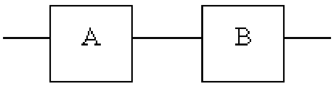
Parallèle :

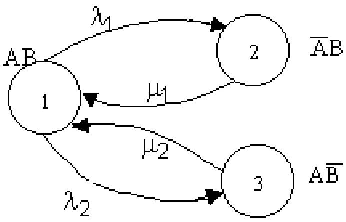




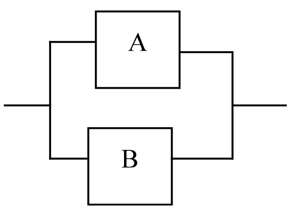
Dispositif réparable

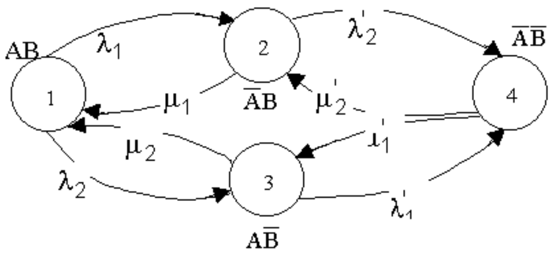
Série :



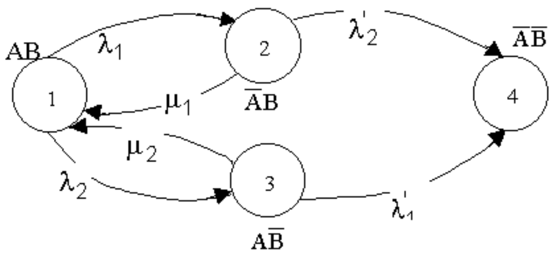


Parallèle :





Graphe de Markov relatif à la disponibilité

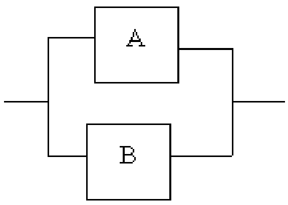


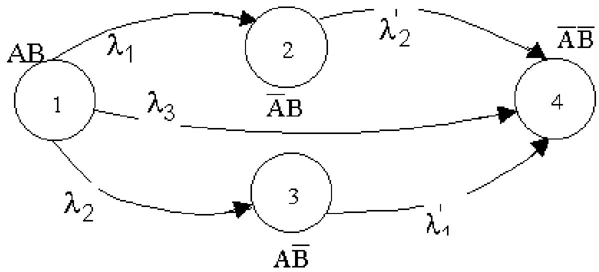
Graphe de Markov relatif à la fiabilité

1.7.2.3 Système à 2 entités : cause commune

On considère un système à 2 entités en parallèle avec une défaillance de type cause commune. Cette cause commune entraîne une défaillance catastrophique des deux entités simultanément.

Dispositif non réparable :

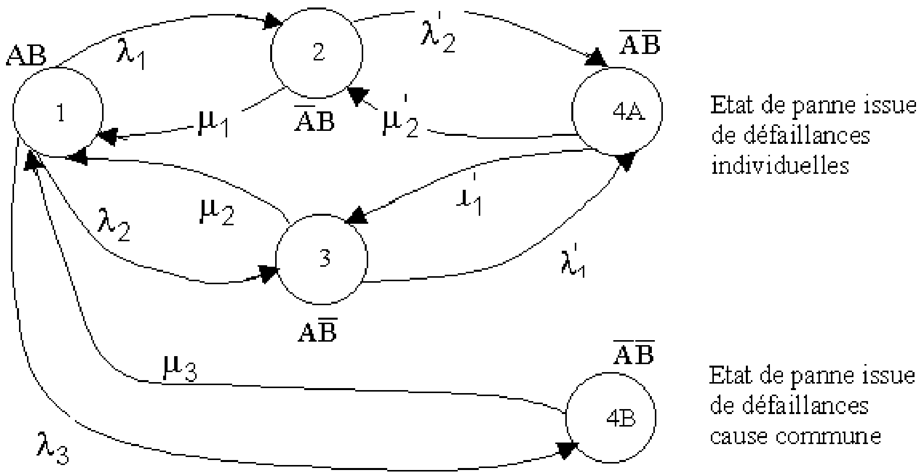




Dispositif réparable :

Si le temps de réparation (TTR) du système pour passer de l'état 4 vers l'état 1 est différent après la défaillance cause commune et après les défaillances individuelles alors le programme de réparation ***dépend du passé*** ce qui contre dit la propriété de ***non-mémoire*** du modèle :

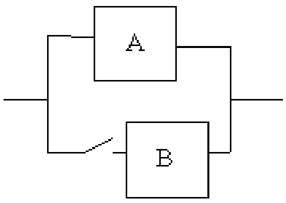
⇒ nécessité d'avoir 2 états de panne 4A et 4B.

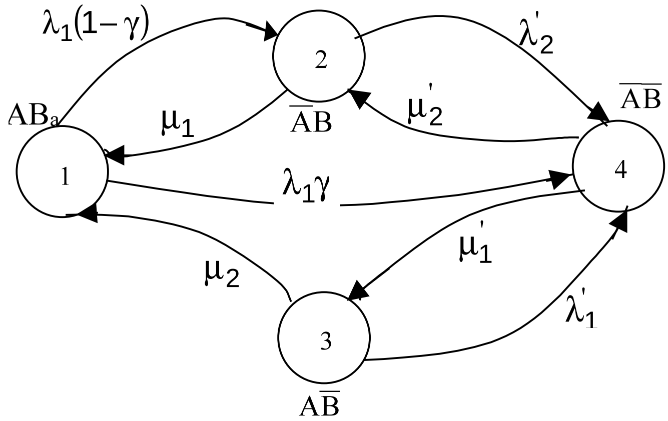


1.7.2.4 Système à 2 entités en redondance passive

Cahier des charges :

1) un élément A assure normalement la production $A(\lambda_1, \mu_1)$
2) un second élément $B(\lambda_2, \mu_2)$ est à l'arrêt en attente
3) B démarre automatiquement si A est en panne, mais la communication n'étant pas parfaite, il existe une probabilité γ de refus de démarrage à la sollicitation de B
4) la politique de maintenance autorise autant de réparateurs que nécessaire





1.7.3 Calcul rapide de l'indisponibilité asymptotique

Hypothèses :

- régime permanent
- conservation du flux : $\lambda_{i\,j}$ = cste
- $P_i(\infty)$: probabilité d'être dans l'état i
- $P_i(\infty)\lambda_{i\,j}$: fréquence des transitions de i vers j
- ψ = ensemble quelconque d'états du système
- X = ensemble des états de panne
- état 1 : tous les états sont disponibles
- état β : système est défaillant ($\beta \in X$)
- $|a_{ii}|$: somme des taux de transition issus d'un sommet i

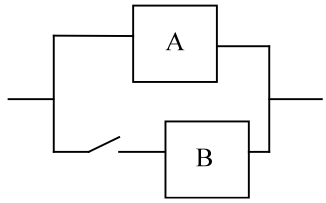
$$a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$$

Théorème 1 : En régime permanent la fréquence des transitions vers l'extérieur est égale à la fréquence des transitions vers l'intérieur

$$\sum_{i \in \Psi} \sum_{j \notin \Psi} P_i(\infty)\lambda_{ij} = \sum_{j \notin \Psi} \sum_{i \in \Psi} P_j(\infty)\lambda_{ji}$$

$$\Rightarrow P_i(\infty)$$

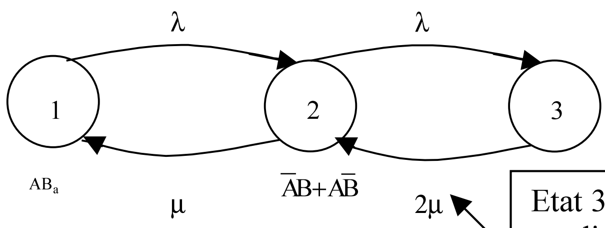
Exemple :



On considère le cas de deux éléments identiques en redondance passive. La politique de maintenance est la suivante :

- lorsque le 1er tombe en panne, le second démarre et la réparation du 1er commence tout de suite
- lorsque les deux sont en panne, il y a deux réparateurs

Graphe de Markov :



Etat 3 : les deux sont en pannes et on dispose de 2 réparateurs, on a donc 2 fois plus de chance que l'un des deux soit réparé. Rappel : un réparateur par entité.

Application du théorème 1 :

$$\sum_{i=1}\sum_{\{j=2,3\}} P_i(\infty)\lambda_{ij} = \sum_{\{j=2,3\}}\sum_{i=1} P_j(\infty)\lambda_{ji} \qquad \text{avec } \psi = \{1\}$$
$$\Leftrightarrow P_1(\infty)\lambda = P_2(\infty)\mu$$

$$\sum_{\{i=1,2\}}\sum_{j=3} P_i(\infty)\lambda_{ij} = \sum_{j=3}\sum_{\{i=1,2\}} P_j(\infty)\lambda_{ji} \qquad \text{avec } \psi = \{1, 2\}$$
$$\Leftrightarrow P_2(\infty)\lambda = P_3(\infty)2\mu$$

d'où $P_1(\infty) = \dfrac{2\mu^2}{\lambda^2} P_3(\infty)$

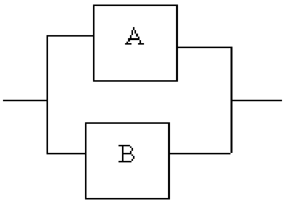
de plus $P_1(\infty) + P_2(\infty) + P_3(\infty) = 1$

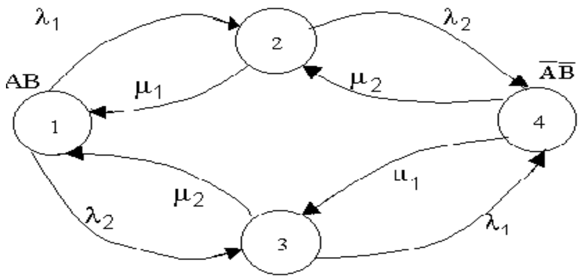
$$\overline{A}(\infty) = P_3(\infty) = \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2} \cong \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \text{ avec } \frac{\lambda}{\mu} << 1$$

Théorème 2 : Si le graphe est fortement connexe, alors une excellente approximation de l'indisponibilité asymptotique du système est donnée par :

$$\overline{A}(\infty) \cong \sum_{\substack{\text{chemins} \\ 1 \text{ à } X}} \frac{\prod \text{taux de transition du chemin}}{\prod\limits_{\substack{i \in \text{chemin} \\ \text{sauf } 1}} |a_{ii}|}$$

Exemple : Deux composants en redondance active.

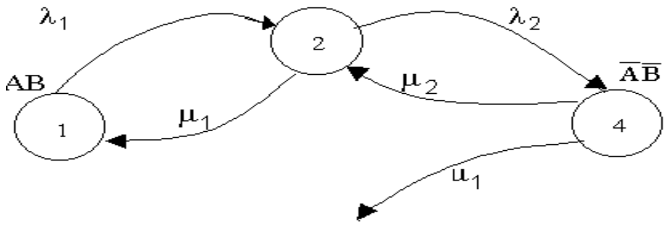




Application du théorème 2 :

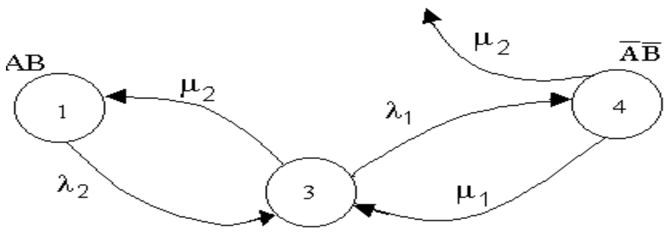
Etat de panne : état 4 $\Rightarrow$ 2 chemins réduits indésirables

Premier chemin :



$$1^{er} \text{ chemin} \Rightarrow \frac{\prod \text{taux de transition du chemin 1}}{\prod\limits_{\substack{i \in \text{chemin1} \\ \text{sauf } 1}} |a_{ii}|} = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{|a_{22}| \times |a_{44}|} = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{(\mu_1 + \lambda_2) \times (\mu_1 + \mu_2)}$$

Second chemin :



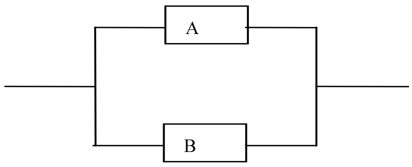
$$2^{er} \text{ chemin} \Rightarrow \frac{\prod \text{taux de transition du chemin 2}}{\prod\limits_{\substack{i \in \text{chemin 2} \\ \text{sauf } 1}} |a_{ii}|} = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{|a_{33}| \times |a_{44}|} = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{(\mu_2 + \lambda_1) \times (\mu_1 + \mu_2)}$$

Au total :

$$\overline{A}(\infty) \cong \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{(\mu_1+\lambda_2)\times(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{(\mu_2+\lambda_1)\times(\mu_1+\mu_2)} = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{1}{\mu_2+\lambda_1}+\frac{1}{\mu_1+\lambda_2}\right]$$

1.7.4 Exemple final

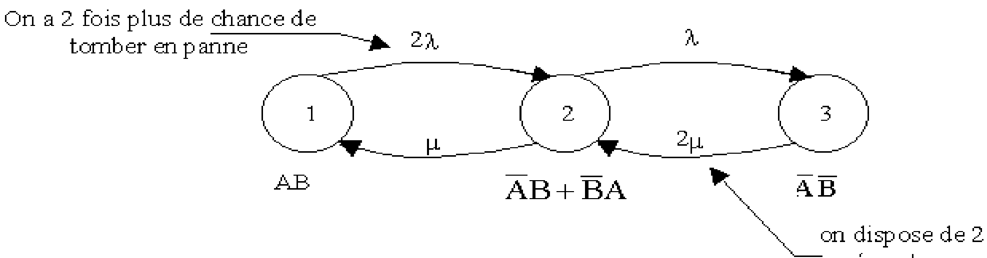
On considère deux éléments identiques en redondance active. La politique de maintenance est une politique bi-réparateur avec indépendance des éléments.



Le cahier des charges est :

- les deux éléments sont identiques
- Si les deux éléments sont en service, ils fonctionnent simultanément à moitié de leur charge
- Si l'un tombe en panne, l'autre continu et assure la totalité de la tâche
- Si les deux éléments sont en panne le système est défaillant
- On dispose de deux réparateurs

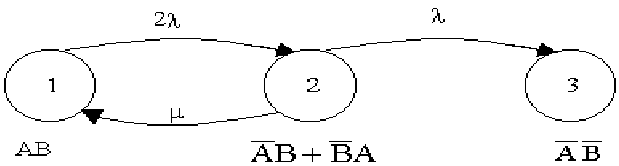
1) Etats du système
   1 : système en bon fonctionnement
   2 : un élément en panne (marche dégradée)
   3 : deux éléments en panne (système défaillant)



Graphe disponibilité

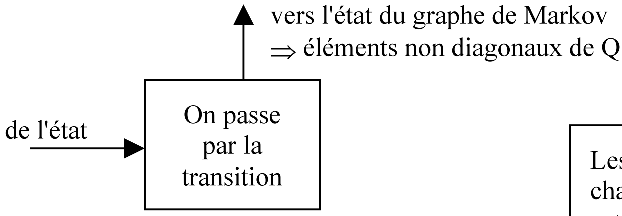
2) Graphe de Markov pour le calcul de la disponibilité du système
3) Graphe de Markov pour le calcul de la fiabilité du système

Il faut à partir du graphe de disponibilité rendre l'état de défaillance absorbant.



Graphe fiabilité

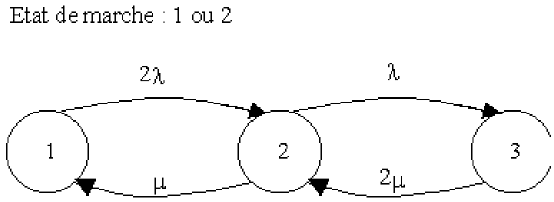
4) Construction de la matrice de transition Q



Les **éléments diagonaux** sont la somme changée de signe de tous les autres éléments de cette même ligne

4.1) Calcul de la disponibilité du système : $A(t) = P_1(t) + P_2(t)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{état 1} & \text{état 2} & \text{état 3} \end{array} \leftarrow \\ Q = & \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{état 1} \\ \text{état 2} \\ \text{état 3} \end{array} \end{array}$$



$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \times Q$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dP_1(t)}{dt} \;\; \frac{dP_2(t)}{dt} \;\; \frac{dP_3(t)}{dt} \right) = [P_1(t) \;\; P_2(t) \;\; P_3(t)] \times \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 2\lambda P_1(t) - (\mu+\lambda) P_2(t) + 2\mu P_3(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t) \end{cases}$$

On résout le système précédent par transformée de Laplace. D'après les conditions initiales $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = P_3(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} pP_1(p) - 1 = -2\lambda P_1(p) + \mu P_2(p) \\ pP_2(p) = 2\lambda P_1(p) - (\mu+\lambda) P_2(p) + 2\mu P_3(p) \\ pP_3(p) = \lambda P_2(p) - 2\mu P_3(p) \end{cases}$$

Plutôt que de calculer $A(t) = P_1(t) + P_2(t)$, il est plus rapide de calculer $\overline{A}(t) = 1 - A(t) = P_3(t)$ la non disponibilité :

$$\begin{bmatrix} p+2\lambda & -\mu & 0 \\ -2\lambda & p+\mu+\lambda & -2\mu \\ 0 & -\lambda & p+2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(p) \\ P_2(p) \\ P_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par Cramer, on obtient :

$$\Delta = p(p+\lambda+\mu)(p+2\lambda+2\mu)$$

$$\Delta_{P_3} = 2\lambda^2$$

$$\Rightarrow P_3(p) = \frac{\Delta_{P_3}}{\Delta} = \frac{2\lambda^2}{p(p+\lambda+\mu)(p+2\lambda+2\mu)}$$

On décompose en élément simple, la transformation inverse de Laplace donne :

$$\overline{A}(t) = P_3(t) = \frac{\lambda^2\left(1-2e^{-(\lambda+\mu)t}+e^{-2(\lambda+\mu)t}\right)}{(\lambda+\mu)^2}$$

Conclusion : La disponibilité A(t) du système est donnée par l'expression suivante :

$$A(t) = 1-\frac{\lambda^2\left(1-2e^{-(\lambda+\mu)t}+e^{-2(\lambda+\mu)t}\right)}{(\lambda+\mu)^2}$$

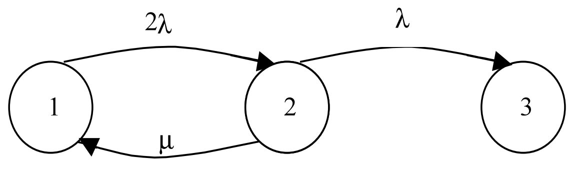
et son comportement asymptotique peut être donné soit

- à partir de A(t) avec $t \to \infty$
- à partir de $P_3(p)$ puisque $\lim\limits_{t\to\infty} P_3(t) = \lim\limits_{p\to 0} pP_3(p)$
- ou à partir du système d'éq. diff. sachant que $\frac{dP(t)}{dt} = 0$ à $t \to \infty$ et $\sum P_i = 1$

$$A(\infty) = 1-\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}$$

4.2) Calcul de la fiabilité du système : $R(t) = P_1(t) + P_2(t) = 1- P_3(t)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{état 1} & \text{état 2} & \text{état 3} \end{array} \leftarrow \\ Q = & \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{état 1} \\ \text{état 2} \\ \text{état 3} \end{array} \end{array}$$



état absorbant

Conditions initiales $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = P_3(0) = 0$:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \times Q$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} & \frac{dP_2(t)}{dt} & \frac{dP_3(t)}{dt} \end{pmatrix} = [P_1(t)\ P_2(t)\ P_3(t)] \times \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = 2\lambda P_1(t) - (\mu+\lambda) P_2(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_2(t) \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p+2\lambda & -\mu & 0 \\ -2\lambda & p+\mu+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(p) \\ P_2(p) \\ P_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par Cramer, on obtient :

$$\Delta = p(p-p_1)(p-p_2)$$

p_1 et p_2 sont les racines de $p^2 + (3\lambda+\mu)p + 2\lambda^2 = 0$

$$p_1 = \frac{-(3\lambda+\mu) + \sqrt{\mu^2 + 6\lambda\mu + \lambda^2}}{2} < 0$$

$$p_2 = \frac{-(3\lambda+\mu) - \sqrt{\mu^2 + 6\lambda\mu + \lambda^2}}{2} < p_1$$

$$p_1 \times p_2 = 2\lambda^2$$

$$\Delta_{P_3} = 2\lambda^2$$

$$\Rightarrow P_3(p) = \frac{\Delta_{P_3}}{\Delta} = \frac{2\lambda^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

On décompose en élément simple, la transformation inverse de Laplace donne :

$$P_3(t) = 1 + \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}$$

Conclusion : La fiabilité R(t) du système est donnée par l'expression suivante :

$$R(t) = 1 - P_3(t) = P_3(t) = \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}$$

Le calcul de la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance est donné par :

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty P_1(t)dt + \int_0^\infty P_2(t)dt$$

Or $\int_0^\infty P(t)dt = \lim_{p\to 0} P(p)$ donc :

$$MTTF = \lim_{p\to 0} P_1(p) + \lim_{p\to 0} P_2(p)$$

avec $P_1(p) = \frac{\Delta_{P_1}}{\Delta} \frac{p+\lambda+\mu}{(p-p_1)(p-p_2)}$ et $P_2(p) = \frac{\Delta_{P_2}}{\Delta} \frac{2\lambda}{(p-p_1)(p-p_2)}$

soit $MTTF = \frac{\lambda+\mu}{p_1p_2} + \frac{2}{p_1p_2} = \frac{3\lambda+\mu}{p_1p_2} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}$ si $P_1(t = 0) = 1$.

Application numérique : 1 élément $\lambda = 10^{-3}\ h^{-1} \Rightarrow MTTF = 1000h$
$\mu = 1h^{-1} \Rightarrow MTTR = 1h$

2 éléments en série sans réparation

$\Rightarrow MTTF = 1/2\lambda = 500h$

2 éléments identiques en parallèle sans réparation

$\Rightarrow MTTF = 3/2\lambda = 1500h$

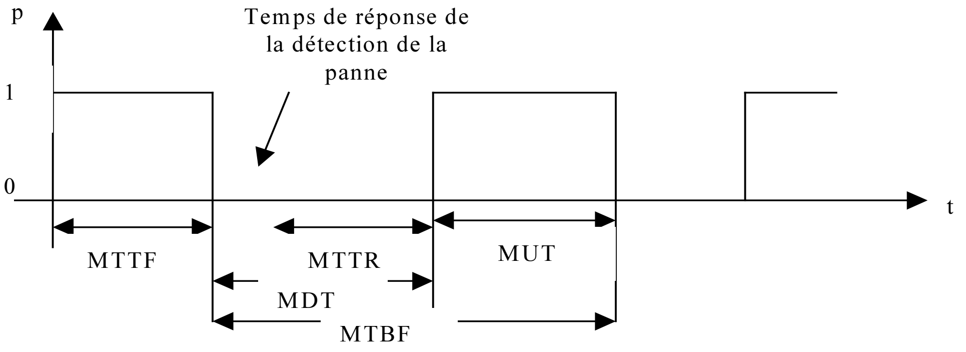
2 éléments identiques en parallèle avec réparation

si $P_1(0) = 1$ $\Rightarrow MTTF = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} = 501500h \cong 54$ans

si $P_2(0) = 1$ $\Rightarrow MTTF = \frac{2\lambda+\mu}{2\lambda^2} = 501000h \cong 54$ans

1.7.5 Calcul de la Maintenabilité (MDT) et du MTBF

Rappel : La maintenabilité se mesure par la probabilité que la maintenance d'une entité E, assurée dans des conditions données et avec des moyens et des procédures, s'achève à l'instant t, sachant que l'entité est défaillante à l'instant t = 0.



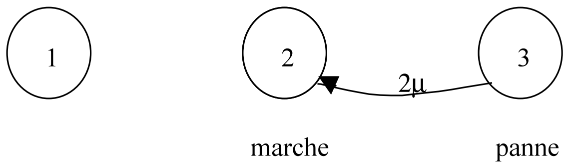
La durée pendant lequel le système reste défaillant à partir de la défaillance correspond au temps MDT. Ce temps, est souvent voisin du temps MTTR et quantifie la maintenabilité du système, aussi nous considèrerons que MDT ≅ MTTR. Enfin, le temps moyen de bon fonctionnement est quant à lui donné par l'expression suivante :

$$\text{MTBF} = \text{MDT} + \text{MUT}$$

1.7.5.1 Calcul du MDT

Déterminer le temps MDT équivaut à modifier les conditions initiales du système et ne conserver dans le graphe Markov que le(s) transition(s) des états pannes aux états marches.

Exemple, considérons le dispositif à 2 éléments avec 2 dépanneurs :



Conditions initiales $P_2(0) = 0$ et $P_3(0) = 1$.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\mu & -2\mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} P_2' = 2\mu P_3 \\ P_3' = -2\mu P_3 \end{cases}$$

Sachant que $P_3(0) = 1$, on obtient :

$$P_3' = -2\mu P_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP_3}{P_3} = -2\mu dt \quad \Leftrightarrow \quad P_3(t) = ke^{-2\mu \times t}$$

avec k = 1.

Conclusion :

$$\overline{M}(t) = P_3(t) = e^{-2\mu \times t}$$

$$M(t) = 1 - P_3(t) = P_2(t) = 1 - e^{-2\mu \times t} \quad \Leftrightarrow \quad P_2' = 2\mu P_3 \quad \Leftrightarrow \quad dP_2 = 2\mu e^{-2\mu \times t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad P_2(t) - P_2(0) = -e^{-2\mu \times t} + 1$$

or $$\boxed{\text{MTTR} = \int_0^\infty \overline{M}(t) \times dt = \int_0^\infty e^{-2\mu \times t} \times dt = \frac{1}{2\mu} \cong \text{MDT}}$$

1.7.5.2 Calcul du MUT et MTBF

Ce temps MUT correspond à la durée moyenne de bon fonctionnement après réparation. Le calcul se fait alors de la même façon que pour le calcul du MTTF, à la seule différence que les conditions initiales sont données en remplaçant la distribution des probabilités à l'instant zéro par la distribution asymptotique des probabilités d'entrer dans un état de fonctionnement à la suite d'une réparation.

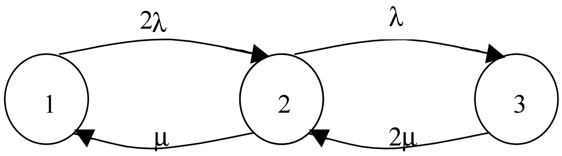
$$\underbrace{1\ldots i\ldots l}_{\text{état bon fonct.} + \text{état dégradé}} \xleftarrow{\;a_{ji}\;} \underbrace{l+1\ldots j\ldots n}_{\text{état de panne}}$$

C'est une probabilité conditionnelle. Par conséquent, après remise en service, le système se trouve dans l'un quelconque des états de marche avec les probabilités initiales suivantes :

$$P_i(0)=\frac{\sum_{j=l+1}^{n}P_j(\infty)a_{ji}}{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{n}P_j(\infty)a_{ji}} \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

On obtient alors le MUT en appliquant les résultats développés pour le calcul du MTTF (temps moyen jusqu'à la défaillance) à la différence que la distribution initiale est donnée par la relation précédente.

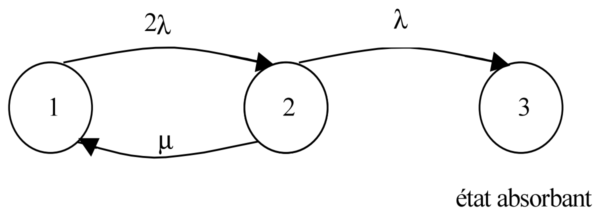
Dans notre exemple précédent, il existe un seul état de panne, il confère que les conditions initiales (= distribution asymptotique des probabilités d'entrer dans un état de fonctionnement à la suite d'une réparation => graphe de Markov pour la disponibilité) sont :

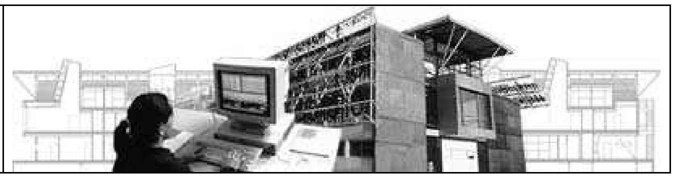


$$P_1(0)=\frac{P_3(\infty)a_{31}}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2+1}^{3}P_j(\infty)a_{ji}}=0 \text{ et } P_2(0)=\frac{P_3(\infty)a_{32}}{\sum_{i=1}^{2}P_3(\infty)a_{3i}}=\frac{P_3(\infty)a_{32}}{P_3(\infty)a_{31}+P_3(\infty)a_{32}}=1$$

Ayant déterminé ces nouvelles conditions initiales, il reste à établir pour le calcul du MUT *(temps moyen de bon fonctionnement après réparation)* la nouvelle matrice Q. Matrice correspondant quant à elle au graphe de Markov établit dans le cadre du calcul de la fiabilité (MTTF *temps moyen de bon fonctionnement jusqu'à la défaillance*) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{état 1} & \text{état 2} & \text{état 3} \; \leftarrow\end{array} \\ Q= & \begin{bmatrix}-2\lambda & 2\lambda & 0\\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{état 1}\\ \text{état 2}\\ \text{état 3}\end{array}\end{array}$$





On obtient :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 2\lambda P_1(t) - (\mu+\lambda) P_2(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_2(t) \end{cases}$$

Soit, sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p+2\lambda & -\mu & 0 \\ -2\lambda & p+\mu+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(p) \\ P_2(p) \\ P_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \text{condition initiale}$$

Le calcul de la durée moyenne de fonctionnement après réparation est donné par :

$$MUT = \text{"}MTTF\text{"} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty P_1(t)dt + \int_0^\infty P_2(t)dt$$

Or $\int_0^\infty P(t)dt = \lim_{p\to 0} P(p)$ donc $MUT = \text{"}MTTF\text{"} = \lim_{p\to 0} P_1(p) + \lim_{p\to 0} P_2(p)$.

D'après Cramer

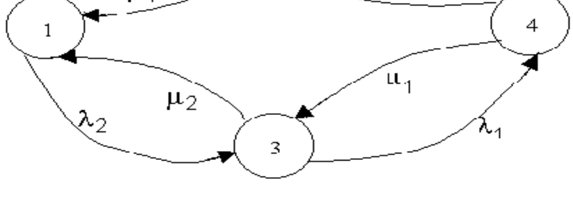
$$P_1(p) = \frac{\Delta_{P_1}}{\Delta} = \frac{\mu \times p}{p(p-p_1)(p-p_2)} \text{ et } P_2(p) = \frac{\Delta_{P_2}}{\Delta} = \frac{p(p+2\lambda)}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

soit

$$\boxed{MUT = \frac{\mu+2\lambda}{p_1 p_2} = \frac{\mu+2\lambda}{2\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad MTBF = MDT + MUT = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu+2\lambda}{2\lambda^2}}$$

1.7.5.3 Exercice complémentaire

Exercice 1: On considère deux composants A et B en redondance active. Le graphe de Markov qui régit ce système est donné ci après, déterminer le temps MUT.



Solution

Pour les 3 états de marche (états 1, 2 et 3) on recherche avant tout les conditions initiales :

$$P_i(0) = \frac{\sum_{j=l+1}^{n} P_j(\infty) a_{ji}}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} P_j(\infty) a_{ji}} \Rightarrow \begin{cases} P_1(0) = 0 \\ P_2(0) = \dfrac{\mu_2 P_4}{\mu_1 P_4 + \mu_2 P_4} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ P_3(0) = \dfrac{\mu_1 P_4}{\mu_1 P_4 + \mu_2 P_4} = \dfrac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \end{cases}$$

Remarque : $P_1(0) + P_2(0) + P_3(0) + P_4(0) = 1 \Rightarrow P_4(0) = 0$

Suivant ces conditions initiales on détermine le temps MUT :

$$\text{MTTF} = \text{MUT} = \lim_{p \to 0} P_1(p) + \lim_{p \to 0} P_2(p) + \lim_{p \to 0} P_3(p)$$

Exercice 2 : Un système automatisé est constitué de deux éléments identiques. Un élément est normalement en fonction tandis que l'autre est à l'arrêt en attente. Lorsque l'élément en fonction a une défaillance, l'autre élément entre en fonction. La communication n'étant pas parfaite, il existe une probabilité γ de refus de démarrage de l'élément à l'arrêt.

On suppose que les taux de transition sont constants. Pour chaque élément, le taux de défaillance est λ. La politique de maintenance et une politique de biréparation.

1er scénario : Le temps moyen de réparation d'un élément est le même que la défaillance soit survenue pendant le fonctionnement ou à la sollicitation $\tau = \frac{1}{\mu}$.

a) Après avoir défini les états du système, représenter les graphes de Markov relatifs à la disponibilité et à la fiabilité.

b) Déterminer la disponibilité asymptotique du système

c) Déterminer les différents temps moyens caractérisant la fiabilité, la maintenabilité et la disponibilité du système pour chaque état initial possible.

2ème scénario : Le temps moyen de réparation dépend du mode de défaillance :

$\tau = \frac{1}{\mu}$ si la défaillance se fait en "marche"

$\tau = \frac{1}{\mu'}$ si la défaillance se fait "à la sollicitation"

a) Représenter les graphes de Markov relatifs à la disponibilité et à la fiabilité après avoir défini les états du système.

b) Déterminer l'indisponibilité asymptotique du système. Retrouver une valeur approchée par le théorème adéquat au calcul de l'indisponibilité asymptotique vu en cours.

c) Que deviennent les temps moyens caractéristiques du système ?

Application numérique :

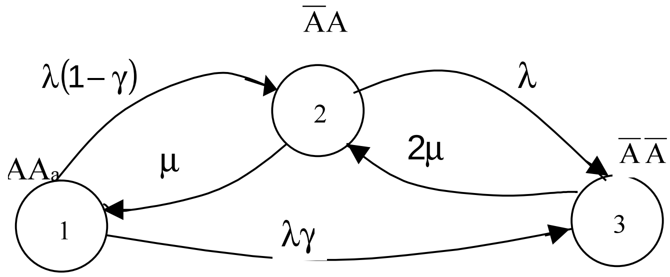
$\lambda = 0.005$, $\gamma = 0.001$, $\mu = 0.2$ et $\mu' = 1$

Solution

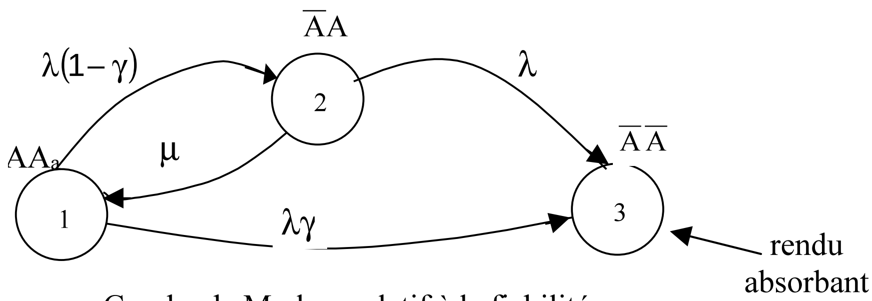
On définit premièrement les états :

- $A\,A_a$: élément A en fonctionnement, élément A_a en attente à l'arrêt
- $\overline{A}\,A$: élément $\overline{A}$ en panne, élément A en fonctionnement
- $\overline{A}\,\overline{A}_a$: élément $\overline{A}$ en panne, élément $\overline{A}_a$ en panne à la sollicitation
- $\overline{A}\,\overline{A}$: les deux éléments sont en pannes

Scénario 1 :

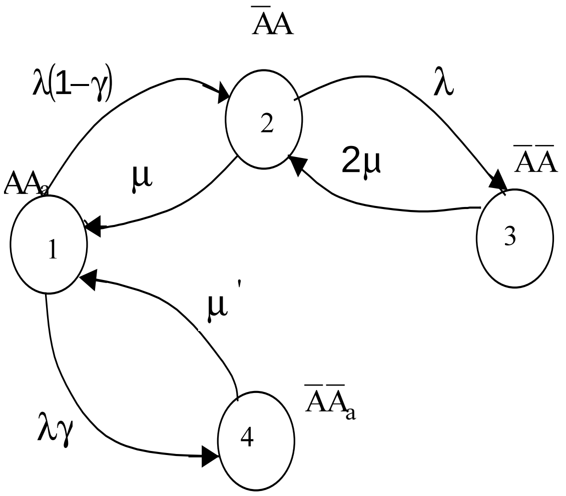


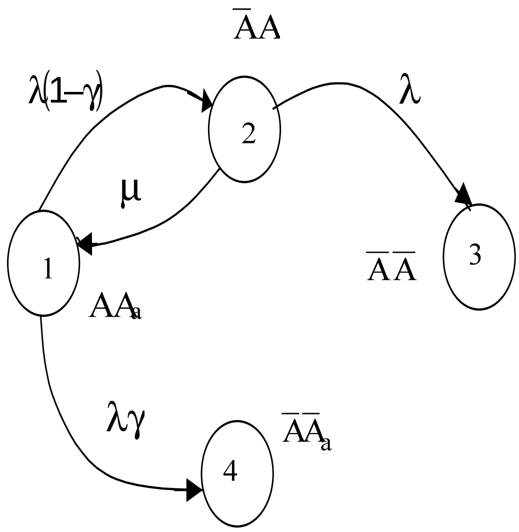
Graphe de Markov relatif à la disponibilité



Graphe de Markov relatif à la fiabilité

Scénario 2 :





Graphe de Markov relatif à la disponibilité / Graphe de Markov relatif à la disponibilité

1.7.6 Introduction à la tolérance aux fautes

Améliorer la S.D.F. d'un système, peut être fait par 2 moyens essentiels.

1.7.6.1 **Améliorer la S.D.F. des composants**

Elle confère à réduire la probabilité d'apparition de leurs défaillances :

→ Choix d'éléments plus fiables :
pas d'éléments (composants) nouveaux non qualifiés pas des statistiques.

→ Etude poussée des conditions de fonctionnement :
définir toutes les conditions et événements possibles protections contre les influences (pression, humidité, poussière, radiations, vibration, chocs, projections, intrusions…)

→ Conception déductive :
partir d'un cahier des charges, définir les fonctions, missions, valider les étapes de conception.

→ Déverminage (fonctionnement préliminaire dans des conditions permettant d'accélérer le vieillissement pour atteindre la période à λ constant).

1.7.6.2 Améliorer la structure du système.

Cela revient à introduire des redondances dont l'objectif est d'augmenter le nombre et la probabilité des états de bon fonctionnement par rapport aux états de défaillance.

→ détection et correction d'erreurs sur les données
→ redondance du système
→ redondance des composants

Le plus souvent on combine les deux approches. On commence à combiner la redondance matérielle à la redondance analytique.

1.7.6.3 Classifications des redondances

Redondance : existence, dans une entité, de plus d'un moyen pour accomplir une fonction requise.

Redondance active : telle que tous les moyens d'accomplir une fonction requise sont destinés à être utilisés simultanément.

Redondance passive : telle qu'une partie seulement des moyens d'accomplir une fonction requise est utilisée, le reste n'est utilisé qu'en cas de besoin

Si on veut qualifier le processus qui permet, grâce à la présence d'éléments redondants *de tolérer* la présence d'une faute (rester dans le sous-ensemble des états où le système fonctionne), on définira d'autres qualitatifs.
D'une manière générale ce processus comprend :

- la détection de l'erreur avant qu'elle n'entraîne la défaillance du système
- la réaction qui permet de sélectionner l'élément capable d'assurer la fonction.

Redondance massive : on utilise plusieurs éléments (>2) pour assurer la fonction, ils fonctionnent tous simultanément (redondance active) et un système de vote majoritaire permet de réaliser la fonction sans faute (sauf si une majorité d'éléments sont défaillants). Détection et correction sont alors confondus dans le processus de vote.

Redondance statique, dynamique : caractérise le processus de réaction, suivant que les connexions entre éléments redondants sont figées ou au contraire modifiées par ce processus. Une redondance statique est forcément active.

Redondance sélective : il a remplacement d'un élément défectueux par un autre non défaillant. Celui ci peut être en attente de différentes manières :

- il fonctionne comme l'élément primaire mais ses résultats (sa fonction) ne sont pas utilisés par le système (il est donc toujours prêt à être utilisé)
- il fonctionne autrement. Dans ce cas, il peut :

  - réaliser une autre fonction, il y a alors une redondance partagée

  - se contenter de se préparer à reprendre la fonction défaillante en calculant les points de reprise (noter que ceci est aussi nécessaire dans le cas précédent). On parle parfois de redondance temporelle dans ce cas.

Redondance optimale : Elle convient par exemple à rechercher le nombre de composants minimal à partir d'une structure série

On sait que la fiabilité du système (structure série) initiale est :

$$R = \prod_{i=1}^{n} R_i = R_1 R_2 \cdots R_i \cdots R_n$$

Supposons que l'on double e_i la fiabilité devient :

$$R' = R_1 R_2 \cdots R_{i-1}\left(1-(1-R_i)^2\right)R_{i+1}\cdots R_n$$

avec : $1-(1-R_i)^2 = (2-R_i)R_i$.

R' est d'autant > à R que R_i est petit :

> $\Rightarrow$ il faut doubler le composant de plus petite fiabilité. On fait donc de proche en proche jusqu'à obtenir la fiabilité cherchée (on double un autre ou le même si la fiabilité équivalente est encore la plus petite).

D'autres critères existent bien entendu.

2 CONCLUSION

A compléter…

3 REFERENCE

[1] Kaufman A., Grouchko D., et Cruon R., 1975, "Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes", *éditions Masson et Cie*.

[2] Corazza M., 1975, "Technique mathématique de la fiabilité prévisionnelle", *éditions Cepadues.*

[3] Reiller R., 1999, "Analyse et maintenance des automatismes industriels (cours et exercices et sujets d'examen résolus)", *éditions Ellipses, collection Technosup.*

4 ANNEXE

4.1 Examen 2001/2002

SURVEILLANCE : APPROCHE SURETE DE FONCTIONNEMENT

Seuls les documents manuscrits et polycopié de cours sont autorisés. Toutes calculatrices autorisées. Durée : 1H30

Exercice : Chaîne de Markov

Dans une hypothétique école d'ingénieurs dont la scolarité normale comporte 3 années d'études on a constaté les résultats suivants :

Un étudiant en fin d'année a la probabilité :

p de passer en année supérieure, ou d'obtenir son diplôme s'il était en 3ème année,
q de redoubler
r d'être renvoyé,
avec p + q + r =1

1 : Donner le nombre d'états et représenter par une chaîne de Markov le déroulement des études dans cette école
2 : Donner la matrice de transition associée.
3 : Que devient la chaîne de Markov si au plus un redoublement est autorisé au cours de la scolarité ?
4 : Montrer alors que le nombre d'état est de 8 et redessiner la chaîne de Markov associée.
5 : Donner la matrice de transition associée.

Exercice : Calcul de disponibilité

Une machine est susceptible de subir deux types de pannes :

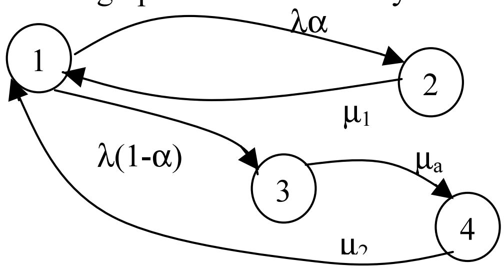
- avec un taux $\lambda\alpha$, $0<\alpha<1$, elle subit une panne de type P1, dans ce cas la réparation est effectuée immédiatement par l'opérateur de la machine , le taux de réparation est μ_1
- avec un taux $\lambda(1-\alpha)$, elle subit une panne de type P2, dans ce cas on fait appel à un réparateur, la durée d'attente du réparateur est exponentielle de taux μ_a, lorsque le réparateur est arrivé le taux de réparation est μ_2

1 : Donner le graphe de Markov du système
2 : Déterminer la disponibilité asymptotique de la machine en fonction de α avec : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$

ELEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1

1 : Donner le graphe de Markov du système



2 : Déterminer la disponibilité asymptotique de la machine en fonction de α avec : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_a = 10\lambda$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\times Q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dot{P}_1(t) \;\; \dot{P}_2(t) \;\; \dot{P}_3(t) \;\; \dot{P}_4(t)\right) = \left(P_1(t) \;\; P_2(t) \;\; P_3(t) \;\; P_4(t)\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{etat1} & \text{etat2} & \text{etat3} & \text{etat4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda\alpha-\lambda(1-\alpha) & \lambda\alpha & \lambda(1-\alpha) & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_a & \mu_a \\ \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{etat1} \\ \text{etat2} \\ \text{etat3} \\ \text{etat4} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\dot{P}_1(t) \;\; \dot{P}_2(t) \;\; \dot{P}_3(t) \;\; \dot{P}_4(t)\right) = \left(P_1(t) \;\; P_2(t) \;\; P_3(t) \;\; P_4(t)\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{etat1} & \text{etat2} & \text{etat3} & \text{etat4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda\alpha & \lambda(1-\alpha) & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_a & \mu_a \\ \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{etat1} \\ \text{etat2} \\ \text{etat3} \\ \text{etat4} \end{array}$$

La disponibilité asymptotique $A(\infty) = \lim_{t\to\infty} P_1(t)$ est alors donnée par la résolution du système

$$\left(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right) = \left(P_1(\infty) \;\; P_2(\infty) \;\; P_3(\infty) \;\; P_4(\infty)\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{etat1} & \text{etat2} & \text{etat3} & \text{etat4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda\alpha & \lambda(1-\alpha) & 0 \\ 10\lambda & -10\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10\lambda & 10\lambda \\ 10\lambda & 0 & 0 & -10\lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{etat1} \\ \text{etat2} \\ \text{etat3} \\ \text{etat4} \end{array}$$

et $P_1(\infty) + P_2(\infty) + P_3(\infty) + P_4(\infty) = 1$

Soit

$$\begin{cases} -\lambda P_1 + 10\lambda P_2 + 10\lambda P_4 = 0 \\ \lambda\alpha P_1 - 10\lambda P_2 = 0 \\ \lambda(1-\alpha)P_1 - 10\lambda P_3 = 0 \\ 10\lambda P_3 - 10\lambda P_4 = 0 \\ P_1 = -P_2 - P_3 - P_4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 - 10P_4 = 10P_2 \\ \dfrac{(1-\alpha)}{10} P_1 = P_3 \\ P_3 = P_4 \\ P_1 = -P_2 - 2\dfrac{(1-\alpha)}{10} P_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha P_1 = 10P_2 \\ \dfrac{(1-\alpha)}{10} P_1 = P_3 \\ P_3 = P_4 \\ P_1 = -\dfrac{\alpha}{10} P_1 - 2\dfrac{(1-\alpha)}{10} P_1 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ P_1(\infty) = \frac{10}{12-\alpha} \right.$$

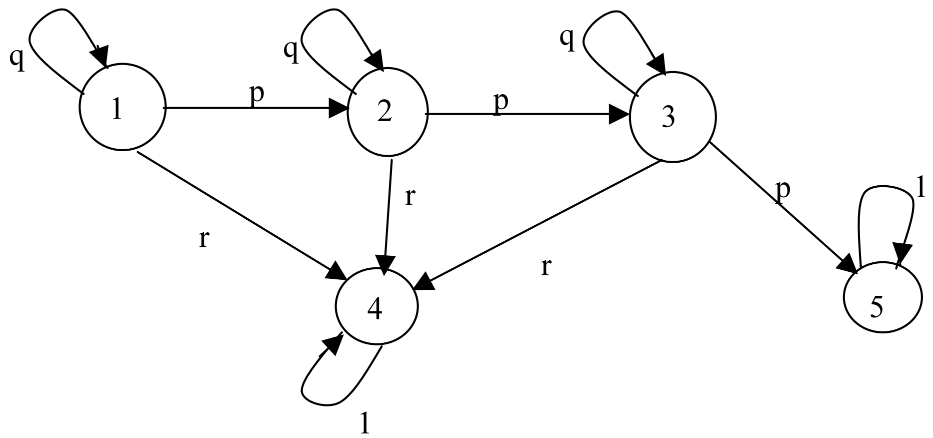
Exercice : Chaîne de Markov

Dans une hypothétique école d'ingénieurs dont la scolarité normale comporte 3 années d'études on a constaté les résultats suivants :

Un étudiant en fin d'année a la probabilité :

- p de passer en année supérieure, ou d'obtenir son diplôme s'il était en 3ème année,
- q de redoubler
- r d'être renvoyé,
- avec p + q + r =1

1 : Donner le nombre d'états et représenter par une chaîne de Markov le déroulement des études dans cette école



2 : Donner la matrice de transition associée.

etat1	etat2	etat3	etat4	etat5	
q	p		r		etat1
	q	p	r		etat2
		q	r	p	etat3
			1		etat4
				1	etat5

3 : Que devient la chaîne de Markov si au plus un redoublement est autorisé au cours de la scolarité ? Montrer alors que le nombre d'état est de 8 et redessiner la chaîne de Markov associée.

4 : Donner la matrice de transition associée.